

1916.

No. 15.

ANNALEN DER P H Y S I K.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 50. Heft 7.

DER GANZEN REIHE 355. BANDES 7. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1916.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.
(Ausgegeben am 17. August 1916.)*

Inhalt.

	Seite
1. R. A. Millikan. Die Existenz eines Subelektrons?	729
2. L. Vegard. Über die elektrische Absorption in Entladungsröhren	769
3. Max B. Weinstein. Über die innere Reibung der Gase. II. Der zweite Reibungskoeffizient, die Gustav Kirchhoffschen thermodynamisch - hydrodynamischen Gleichungen, die Maxwell'sche Gastheorie	796
4. Paul S. Epstein. Versuch einer Anwendung der Quantenlehre auf die Theorie des lichtelektrischen Effekts und der β -Strahlung radioaktiver Substanzen	815
5. Clemens Schaefer. Zur Methode der logarithmischen Isochromaten	841

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Ent
tare
gefi
wur
der
We
duk
der
dur
um
gem
bek
Met

scha
der
den
Ver
scha
mis
Die
der
The

Phil.

der
entap

A

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 50.

1. Die Existenz eines Subelektrons? von R. A. Millikan.

§ 1. Historische Entwicklung der Idee eines elementar- elektrischen Quantums.

Es war im Jahre 1833, als Faradays elektrolytische Entdeckungen zuerst auf das Vorhandensein eines elementaren elektrischen Quantums hinwiesen und zuerst eine ungefähre Schätzung seines Wertes ermöglichten. Diese Schätzung wurde zuerst durch Stoney¹⁾ im Jahre 1874 durchgeführt, der den Wert auf $0,8 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh. ansetzte, einen Wert, der von den elektrolytischen Bestimmungen des Produktes Ne und den kinetischen Theorieberechnungen von N , der Zahl der Moleküle in einem Grammmolekül, abhing. Diese durch die kinetische Theorie berechneten Werte schwanken um das Zehnfache; wenn aber der Wert, der um 1900 allgemein angenommen war, nämlich der in Meyers wohlbekanntem Buche²⁾ gegebene, gebraucht wird, so gibt Stoney's Methode $e = 2 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh.

Die Faradayschen Gesetze wurden jedoch sogar von den scharfsinnigsten Gelehrten nicht als ein allgemeiner Beweis der atomistischen Zusammensetzung der Elektrizität angesehen; denn es war ganz und gar natürlich, dieses genaue vielfache Verhältnis der Quanten in Elektrolyse lieber den Eigenschaften der Atome, die diese Quanten tragen, als der atomistischen Eigenschaft der Elektrizität selbst zuzuschreiben. Dies war auch die Behandlungsweise, die Maxwell³⁾ verfolgte, der sich selbst entschieden einer allgemeinen atomistischen Theorie der Elektrizität entgegenstellte. Aber auch Faraday,

1) G. J. Stoney, Trans. Roy. Dublin Soc. 4. p. 582. 1891. Ebenso Phil. Mag. p. 385. 1881.

2) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase, 1899. Die Zahl der Gasmoleküle im Kubikzentimeter ist hier als 6×10^{19} gegeben und entspricht $N = 1,34 \times 10^{24}$.

3) J. C. Maxwell, Electricity and Magnetism, p. 380 u. 381. 1873.

v. Helmholtz¹⁾ und Kelvin²⁾ zeigten alle deutlich, daß sie diese scheinbare Ionenladung, die in Elektrolyten vorhanden ist, nicht als einzeln existierende Elementarquanta auf geladenen Metallen ansähen. Bis 1900 sogar wurde allgemein ein scharfer Unterschied zwischen metallischer und elektrolytischer Leitung gemacht.

Die Versuche im Cavendish-Laboratorium³⁾ um 1900 von Townsend, Thomson, Zeleny, Rutherford, H. A. u. C. T. R. Wilson u. a. zeigten nur, daß die Leitung in Gasen von derselben Natur wie die elektrolytische Leitung sei, warfen aber kein neues Licht auf die Natur metallischer Leitung. Sie gaben jedoch große Anregung zugunsten der atomistischen Theorie der Elektrizität, so daß diese die herrschende Deutung der elektrischen Phänomene wurde. Auch zeigten sie die Existenz eines Teilchens (Thomsons corpuscle), dessen Wert e/m ^{1/1890} des Verhältnisses für das Wasserstoffion bei der Elektrolyse sei; und sie zeigten ferner, daß man dieses Teilchen in der Natur unter verschiedenen Bedingungen vorfände. Townsend⁴⁾, Thomson⁵⁾, H. A. Wilson⁶⁾, Przibram⁷⁾, Millikan u. Begeman⁸⁾, Ehrenhaft⁹⁾ und De Broglie¹⁰⁾ machten nacheinander rohe Bestimmungen oder Berechnungen des mittleren Wertes des elektrischen Quantums an Gasionen und fanden ihn innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler (ca. 100 Proz.) gleich dem für ein Äquivalention bei der Elektrolyse berechneten.

§ 2. Isolierung einzelner Tröpfchen und Messung ihrer Ladung.

Kein Verfahren irgend eines dieser Beobachter jedoch ermöglichte die Bestimmung einer anderen als der *mittleren* Ionenladung. Daß die Ionenladungen in beiden, in Flüssigkeiten wie auch in Gasen, einander gleich seien, wurde ge-

- 1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen 3. p. 69.
- 2) Lord Kelvin, Nature 56. p. 84. 1897.
- 3) J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gases. 1906.
- 4) J. S. Townsend, Proc. Cambridge Phil. Soc. 9. p. 244. 1897.
- 5) J. J. Thomson, Phil. Mag. 46. p. 528. 1898.
- 6) H. A. Wilson, Phil. Mag. 5. p. 429. 1903.
- 7) K. Przibram, Physik. Zeitschr. Juli 1907.
- 8) R. A. Millikan u. L. Begeman, Phys. Rev. 26. p. 198. 1908.
- 9) F. Ehrenhaft, Physik. Zeitschr. 10. p. 308. 1909.
- 10) M. de Broglie, Le Radium 6. p. 203. 1909.

wöhnlich angenommen, konnte aber nicht bewiesen werden. Ehrenhaft, in einer Abhandlung, welche vor der Naturforscherversammlung zu Königsberg im September 1910 vortragen wurde, gibt einen sehr klaren Bericht über diese Unvollkommenheit seiner eigenen Bestimmungen von e und behauptet das gleiche auch von den Arbeiten aller anderen Beobachter. In der Tat gelang es mir jedoch schon über ein Jahr früher, nämlich im Frühjahr und Sommer 1909, eine Methode zur gänzlichen Entfernung dieser Fehler zu finden.¹⁾ Dies wurde durch die Isolation einzelner geladenen Wassertropfchen in einem vertikalen elektrischen Felde, durch die Bestimmung der Elektrizitätsmenge, die jedes Tröpfchen trägt, sowie durch die Messung von 1. der Fallgeschwindigkeit unter der Schwerkraft, 2. der Geschwindigkeit unter der vereinigten Wirkung der Schwerkraft und dem elektrischen Felde ermöglicht (vgl. p. 746).

Das Folgende ist eine Anführung aus dieser im Oktober 1909 verfaßten Publikation (Phil. Mag. 19. p. 219. 1900):

„Es ist ein äußerst interessanter und lehrreicher Versuch, auf den Beginn der Bewegung eines dieser Tropfen zu warten und sie zu trennen oder in der Richtung umzukehren, indem man das Feld anlegt oder entfernt. Ich habe oft einen Tropfen gefaßt, der gerade noch zu leicht war, um in der Schwebelage gehalten zu werden, und bewegte ihn dann vier- oder fünfmal zwischen zwei Fadenkreuzen hin und her, indem ich beobachten konnte, daß er zuerst unter der Schwere sich abwärts bewegte, wenn das Feld fortgenommen war, und dann gegen die Schwere emporstieg, wenn das Feld angelegt wurde. *Die Genauigkeit und Sicherheit, mit welcher der Zeitpunkt des Durchganges der Tropfen durch die Fadenkreuze bestimmt werden kann, ist genau dieselbe, welche bei der Zeitbestimmung des Durchganges eines Sternes durch das Fadenkreuz eines Durchgangsfernrohres erreichbar ist.* Da ferner die Beobachtungen der in der Gleichung (4) vorkommenden Größen alle bei dem-

1) Diese Methode und die Resultate wurden auf der Britischen Association-Versammlung in Winnepeg im August 1909 als eine nachträglich beigefügte, ins Programm miteingeschlossene Mitteilung, berichtet. Diese Resultate waren zuerst kurz gefaßt im Physical Review 29. p. 260. 1909, und vollständig im Phil. Mag. 19. p. 209. 1910 veröffentlicht.

selben Tropfen gemacht sind, so fallen offenbar alle Unsicherheiten fort, ob bei der Herstellung der kondensierten „Wolken“ nacheinander immer gleiche Bedingungen eingehalten werden können. Es bleibt keine theoretische Unsicherheit in der Methode übrig, außer der Frage, ob das Stokesche Gesetz für diese durch die Schwere fallenden Tropfen gültig ist. Die Versuchsfehler sind auf die Unsicherheit reduziert, die in der Zeitmessung von 3—5 Sek. liegt, wobei der Gegenstand der Zeitbestimmung ein einzelner heller bewegter Punkt ist.“

Ein Vergleich der nach dieser Methode beobachteten Ladungen zeigte, daß sie das Zwei-, Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsfache einer besonderen Ladung seien, die natürlich die kleinste Ladung der Ionen im Gase, die ich studierte, sein mußte. Der Wert dieser Ladung, zufolge dem einfachen Mittelwert meiner Messungen, war $4,70 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh.

Ehrenhaft veröffentlichte ein Jahr später die erwähnte Abhandlung¹⁾, in der er meine Arbeit von 1909 bespricht und Behauptungen aufstellt, daß ich keine Ladungen an einzelnen, individuellen Partikeln bestimmt hätte, sondern daß erst er eine geeignete Methode gefunden hätte. In seinen Worten: „Bei dieser ersten Ausführung war es mir nicht gelungen, an ein und demselben Metallteilchen elektrische Beobachtung und Fallbeobachtung hintereinander zu machen. Erst der hier eingeschlagene Weg gestattet, bis an die Grenze der Ultramikroskopie die Geschwindigkeit der Steigbewegung eines Einzelteilchens unter dem Einfluß einer geeigneten Spannung und sodann *an eben und demselben Teilchen* die Fallgeschwindigkeit desselben Partikels unter bloßem Einfluß der Erdschwere bei kurzgeschlossenem Kondensator zu messen.“

Die neue Anordnung Ehrenhafts und seine neue Beobachtungsmethode waren in jeder wesentlichen Hinsicht genau dieselbe wie die, welche ich in der Abhandlung, die er kritisierte, gebrauchte, die aber, wie er selbst behauptet, von der Methode verschieden war, die er in seiner früheren Arbeit

1) Ihre erste Erscheinung im Druck in etwas veränderter Form kam im Heft der Physik. Zeitschr. für 15. Juli 1910, p. 619, unter dem Titel: „Über eine neue Methode zur Messung von Elektrizitätsmengen an Einzelteilchen, deren Ladung die Ladung des Elektrons erheblich unterschreiten, usw.“

gebraucht hatte. Denn vor der Abhandlung¹⁾ vom Jahre 1910 hatte Ehrenhaft niemals ein vertikales elektrisches Feld²⁾ gebraucht, und daher, wie er auch zugibt, keine Ladung an einem einzelnen bestimmten Partikel finden können. Der Grund, den er für seine Behauptung angibt, daß auch ich nicht die Ladungen an einzelnen Partikeln gemessen hätte, war, daß ich in der Zusammenfassung meiner Resultate die Werte $2e$, $3e$ usw. aus den Beobachtungen verschiedener Tröpfchen, die eine Ladung $2e$ usw. trugen, genommen hatte. Ich hatte dies jedoch nur mit solchen Tröpfchen getan, die, da sie durch genau dasselbe elektrische Feld festgehalten wurden und mit genau derselben Geschwindigkeit unter der Erdschwere fielen, genau gleich groß sein mußten und auch genau dieselbe Ladung tragen mußten. Stillstehende Tröpfchen mit verschiedenen Ladungen fielen mit ganz verschiedenen Geschwindigkeiten, wenn das Feld ausgeschaltet wurde, und kamen daher niemals in Betracht. Was ich also wirklich tat, war nichts weiter als was immer getan wird, um eine genaue Messung irgend einer physikalischen Größe zu bestimmen, z. B. die einer Länge, wo man genau dieselbe Messung verschiedene Male macht und dann den Mittelwert nimmt, *nur um den Fehler beim Ablesen des Meßinstrumentes zu verringern*. Dieses Instrument war in meinem Falle eine Stoppuhr. Es existiert nicht der geringste Grund, die Schwankungen, die Ehrenhaft in meinen Messungen über e fand, einer veränderlichen Größe der Ionenladung zuzuschreiben; denn sie waren nicht größer als die unumgänglichen Abweichungen, die in einer Stoppuhrmessung eines Zeitintervalls von 2–5 Sek. vorkommen. Hätte ich den Wert e für jede einzelne Beobachtung ausgearbeitet und dann den Mittelwert genommen, so wäre das Resultat notwendigerweise auch dasselbe gewesen. Diese

1) Sie erscheint auch in etwas veränderter Form in den Wiener Berichten vom 12. Mai 1910, Abt. IIa; aber diese Publikation ist scheinbar nicht vor Dezember 1910 erschienen, wenigstens ist sie nicht vor diesem Datum im „*Naturae Novitates*“ zitiert.

2) In der Tat benutzte er in der früheren Arbeit (1909), auf die oben Bezug genommen ist, dieselbe Anordnung und Beobachtungsmethode, die schon im Jahre 1908 von De Broglie vollständig beschrieben und in seinen Untersuchungen metallischer Partikeln, die vom Bogen oder Funken zwischen metallischen Elektroden kommen, gebraucht wurde. Vgl. *Compt. rend.* p. 624 u. 1010. 1908.

Kritik hat also nur mit der Art, in der ich meine Beobachtung geordnet habe, zu tun, und gar nichts damit, wie ich meine Messungen machte, *die in der Tat Messungen der Ladungen, getragen von einzelnen individuellen Partikeln, waren.*

Der Grund dieses Bestrebens, Variationen in meinen Messungen der Ladungen auf verschiedenen Ionen zu finden, lag darin, daß Ehrenhaft, als er 1910 die De Brogliesche Methode mit der Methode, die ich mit Wassertröpfchen gebraucht hatte, und die allein die Bestimmung der Ladung auf einen einzelnen Partikel zuläßt, vertauschte, fand, daß diese von ihm gemessenen Ladungen große Unregelmäßigkeiten zeigten. Dies schien ihm das Nichtvorhandensein eines elementaren elektrischen Quantums zu beweisen, und er behauptete, daß die kleinste Ladung, die in vorhergehenden Arbeiten über Flüssigkeiten und Gase vorkam, nichts weiter sei als ein statistischer Mittelwert, der von Ladungen weit verschiedener Größen gebildet sei. Die einzige erschienene Arbeit, die diese Ansicht verneinte, war eben die meine über die Ladungen auf Wassertröpfchen, und daher suchte er auch in meinen Messungen Schwankungen zu finden.

§ 3. Allgemeiner Beweis der atomistischen Zusammensetzung der Elektrizität.

Im April 1910, drei Monate vor der ersten Drucklegung dieser Abhandlung Ehrenhaft's in der Physik. Zeitschr., die die verbreitete Ansicht über die atomistische Zusammensetzung der Elektrizität zu untergraben schien, las ich vor der Amerikanischen Physikalischen Gesellschaft die Abhandlung¹⁾, die, wie mir scheint, einen ganz allgemeinen Beweis für die Ansicht liefert, daß alle elektrischen Ladungen, entweder an Ionen oder an größeren Körperchen, Isolatoren oder Leitern, einfach eine Sammlung elementarer elektrischer Körperchen oder Atome und daß diese alle gleichwertig sind. Der wesentliche Bestand dieses Beweises lag in den folgenden drei Tatsachen, die jedoch teilweise erst nach zwei oder drei Jahren festgestellt wurden:

1) Diese Abhandlung erschien im Druck in einem Auszug in Phys. Rev. **31**. p. 92. 1910; Science **32**. p. 436—443. 1910; Physik. Zeitschr. **11**. p. 1097—1109. 1910. Für eine vollständige Publikation vgl. Phys. Rev. **32**. p. 351—397. 1911.

1. Daß die Ladungen, die von Ionen im Gase an Tröpfchen irgend einer Substanz aufgefangen werden, ganz genau gleichwertig oder genaue Vielfache einer bestimmten Ladung sind;

2. daß die statischen Ladungen, die an Körpern, gleichgültig, ob Isolatoren oder Leiter, haften und die auf diese Körper durch Reibung oder andere Verfahren gebracht werden können, immer genaue Vielfache dieser kleinsten Ionenladung sind;

3. daß die direkte Absonderung eines negativen Elektrons vom Tröpfchen durch darauffallende Röntgenstrahlen dieselbe Veränderung in der Ladung bewirkt als das Aufnehmen eines Ions.

Solange ein geladenes Tröpfchen in Form und Größe unverändert bleibt, ist in einem bestimmten elektrischen Felde die Änderung in der Geschwindigkeit, die durch das Aufnehmen eines oder mehrerer Ionen verursacht wird, proportional zur Ladung, welche das oder die Ionen trug. *Ich fand diese Änderungen in der Geschwindigkeit alle genau dieselben oder deren genaue kleine Vielfache.*

Und weiter, wenn die Totalgeschwindigkeit des geladenen Tröpfchens, durch Einschalten des bestimmten elektrischen Feldes, immer als exaktes Vielfaches der kleinsten Geschwindigkeitsveränderung, verursacht durch das Aufnehmen von Ionen, gefunden wird, so muß die ursprüngliche Ladung, die durch Reibung oder andere Gründe verursacht war, auch aus diesen kleinsten Ionenladungen aufgebaut sein. *Ich fand dieses Verhältnis in jedem Falle sehr genau erfüllt.*

Und schließlich, wenn nun die Geschwindigkeitsveränderung, die durch die Beleuchtung des Partikels mit X-Strahlen oder ultraviolettem Licht und den dadurch ausgelösten negativen Elektronen herbeigeführt wird, dieselbe ist wie die, welche durch das Auffangen eines Ions bewirkt wird, dann muß also die Ionenladung gleich der Ladung sein, die von dem negativen Elektron oder β -Partikel getragen wird. Jedes dieser Verhältnisse wurde im Winter 1909/10 sorgfältig studiert, und in einer im April 1910 vorgetragenen Abhandlung wurde der Schluß gemacht, daß diese Experimente den allgemeinsten und unanfechtbarsten Beweis für den atomistischen Abbau der Elektrizität liefern. Diese Schlüsse wurden erst nach

vier Monate langen ununterbrochenen experimentellen Arbeiten, vom Dezember 1909 bis April 1910 (vgl. Phys. Rev. **32**, p. 360), gezogen. Die Tröpfchen waren aus vielerlei Materialien; manche waren gute Leiter, wie Quecksilber, andere Halbleiter, wie Glyzerin, und wieder andere schlechte Leiter, wie Öl. Ferner wurden einzelne Tröpfchen oft eine Zeit von 4—5 Stunden hindurch beobachtet, während der viele Veränderungen der Ladung auf einem bestimmten Tröpfchen einestails durch das Fangen von Ionen und anderenteils durch das Entladen negativer Elektronen von den Tröpfchen durch das direkte Darauffallen der X-Strahlen veranlaßt wurden. Wollte man diesen direkten Verlust der Elektronen des Tröpfchens verhindern, so wurden Bleischirme in solcher Weise angebracht, daß das Tröpfchen selbst nicht von den Strahlen getroffen, das darunter befindliche Gas aber von ihnen ionisiert werden konnte (vgl. Phil. Mag. Juni 1911. p. 757). Wir fanden auch im Jahre 1910, daß, wenn wir mit geringem Gasdruck arbeiteten, Veränderungen in der Ladung durch das Fangen von Ionen, wegen der Spärlichkeit der Ionen, sehr selten vorkamen, sogar wenn starke X-Strahlen zwischen den Kondensatorplatten wirkten; aber die Veränderungen durch das direkte Auffallen der Strahlen kamen ebensooft vor wie zuvor. Deswegen ist es sehr leicht, bei niedrigem Druck die Ladung eines Tröpfchens in der $+$ -Richtung, und fast unmöglich, in der entgegengesetzten zu ändern. In meiner ersten, 1910 veröffentlichten Arbeit entlud ich die Elektronen vom Tröpfchen nicht mit ultravioletttem Licht, sondern durch das direkte Darauffallen von X-Strahlen und γ -Strahlen, die — wie Thomsons und Lenards Arbeiten zeigen — beide negative Elektronen entladen, welche denselben Wert e/m haben wie diejenigen, die von ultravioletttem Licht entladen werden. Joffé¹⁾ und Meyer u. Gerlach²⁾ begannen 1913 ein sorgfältiges Studium dieser Frage, indem sie die Methode der schwebenden Tröpfchen, genau wie ich sie in den Jahren 1909 und 1911 (Phil. Mag. Februar 1910 und Juni 1911) gebraucht hatte, benutzten, und fanden, daß, wenn die Ladung an ihrem Tröpfchen durch ultraviolettes Licht verändert wurde, sie auch dasselbe viel-

1) Sitzungsber. d. Kgl. Akad. d. Wiss. München, Februar 1913.

2) Arch. de Genève (4) **35**, p. 398. 1913. Vgl. auch Ann. d. Phys. **45**, p. 177. 1914.

fache Verhältnis zwischen den Ladungen bekamen, wie ich es gefunden hatte, wenn ich die Veränderungen entweder durch das Fangen von Ionen oder durch das Entladen der Korpuskeln von dem Tröpfchen durch X- oder γ -Strahlen herbeiführte. Joffé und Meyer u. Gerlachs wesentlicher Beitrag in diesen Abhandlungen besteht in dem Beweis, daß die Entladungen der Elektronen durch ultraviolettes Licht in unregelmäßigen Zwischenzeiten stattfinden und in den wichtigen Messungen über die mittleren Längen dieser Zwischenzeiten von Joffé „Aufladungszeiten“ und von Meyer u. Gerlach „Verzögerungszeiten“ genannt werden.

Des weiteren bestärkten sie in jeder Hinsicht und sehr überzeugend meine Schlüsse über die Genauigkeit des Verhältnisses der Vielfachen, das zwischen den Ladungen, die auf ein Metalltröpfchen gebracht werden können, besteht.¹⁾

Als er seine Abhandlung im September 1910 in Königsberg veröffentlichte, wußte Ehrenhaft leider noch nichts von diesem Verhältnis der Vielfachen; denn er hatte kein quantitatives Studium dieser Eigenschaft von dem Ändern der Ladung gemacht und hatte meine Abhandlung auch noch nicht gesehen. In allen seinen Experimenten, die er 1910 beschrieben hat, und meines Wissens in allen, über die vor 1914 berichtet wird, beschreibt er nur die einmalige Auf- und Niederbewegung eines einzelnen Partikels und die Beobachtungszeit von höchstens einer Minute, genau so, wie ich es schon 1909 beschrieben hatte. Den Fortschritt, welchen seine Experimente 1910 gemacht hatten, kann man am besten durch die folgende Bemerkung erkennen, die als ein Nachtrag zu der Korrektur der vorbemerkten langen Abhandlung in den Wiener Berichten hinzugefügt war. Diese Abhandlung enthält die ganze experimentelle Arbeit, über die 1910 berichtet wurde. Es ist auch bemerkenswert, daß diese Abhandlung im nächsten Monat vorgelegt wurde, in welchem

1) Um eine genaue Messung des vielfachen Verhältnisses zwischen Ladungen zu bekommen, ist es besser, die zwei Geschwindigkeiten v_1 und v_2 zu messen, als die Stärke des Feldes, mit der die v_x -Geschwindigkeit beinahe Null ist. Demgemäß, um größere Genauigkeit meiner Messungen zu erzielen, verließ ich die Schwebende-Tröpfchen-Methode, die Ehrenhaft, Joffé und Meyer u. Gerlach größtenteils gebraucht haben. Dies hauptsächlich erklärt die bessere Übereinstimmung meiner Daten.

ich vor der Amer. Phys. Soc. die Abhandlung vortrug, in der ich einen sorgfältig ausgearbeiteten Beweis über das Verhältnis der vielfachen Zahlen zwischen den Ladungen gab und beschrieb, wie ein Tröpfchen durch eine Zeit von über 5 Stunden hindurch zwischen den Kondensatorplatten auf und nieder bewegt wurde, während sich in dieser Zeit die Ladung viele Male änderte, entweder durch das Fangen von Ionen oder durch den Verlust eines negativen Elektrons.

„Verfasser ist im Begriffe, mit Hilfe eines die Zeit registrierenden Dreihebelstiftschreibers von Siemens & Halske die beschriebene Meßmethode an demselben Teilchen zu wiederholten Malen durchzuführen, um so den zeitlichen Ladungszustand eines und desselben Partikels zu verfolgen. Es gelang dies bis zu viermal und erwies eine ganz außerordentliche Präzision der Methode. Es scheint vielfach ein kontinuierliches Entladen des Partikels stattzufinden; dies jedoch nach Bruchteilen des Elektronenwertes. Die Resultate, welche die vorliegenden Schlüsse erhärten, werde ich in diesen Berichten veröffentlichen.“

Dies ist der einzige Hinweis auf eine Umladung der Tröpfchen, den die Arbeit von 1910 enthält.¹⁾ Mit anderen Worten, Ehrenhaft verspricht mit seinen Partikeln gerade das zu tun, was ich schon in dem 1909 von ihm kritisierten Artikel mit Wassertropfchen getan hatte.

Diese Anführung ist wohl deshalb vorgebracht worden, um zu zeigen, wie es gekommen sein könnte, daß Ehrenhaft seine Beobachtungen von 1910 so deutete, wie er es eben tat. Jene zeigten sehr große Schwankungen in den Werten der Ladungen, die von verschiedenen Partikeln getragen wurden. Er konzentrierte seine Aufmerksamkeit auf

1) Obgleich meine Abhandlung von 1909 keine Besprechung der Veränderungen der Ladungen enthält, hatte ich sie, wie übrigens auch De Broglie 1908, doch beobachtet (Compt. rend. 146. p. 624 u. 1010. 1908.) Trotz den oben gezeigten Verhältnissen schreibt Prof. Ehrenhaft (Wien. Ber. 133. p. 73. 1914; Ann. d. Phys. 44. p. 670. 1914) in einem Bericht über dieses Gebiet folgendes: „Die Umladung des Partikels erfolgt am besten durch Ionisierung der Luft im Kondensator. Solche Umladungen habe ich schon im April 1910 konstatiert und im Anhang an meine Abhandlung mitgeteilt. Etwa ein halbes Jahr später hat Millikan ebenfalls auf diese Erscheinung bei seinen größeren Ölkugeln hingewiesen.“

diese Schwankungen und schloß: 1. daß die verschiedenen Ionen verschiedene Ladungen hätten, und 2., daß verschiedene dieser Ladungen viel kleiner wären als $4,5 \cdot 10^{-10}$, der angenommene Wert des Elektrons. Wäre Ehrenhaft damals über das Verhältnis der vielfachen Ladungen, das durch die obengenannten Experimente ans Licht gefördert wurde, unterrichtet gewesen, so hätte er schwerlich solch eine Deutung seiner eigenen Resultate geben können; denn in diesem Befunde ist der unanfechtbare Beweis enthalten, daß elektrische Ladungen alle aus einer einzigen Einheitsladung aufgebaut werden. In den Experimenten der letzten fünf Jahre, trotzdem viele Beobachter meine Experimente mit allerlei Veränderungen wiederholt haben, hat keiner von ihnen, außer Konstantinowsky (vgl. weiter unten), sogar Ehrenhaft selbst nicht, irgend eine Abweichung von diesem genauen vielfachen Verhältnis, auf das ich zuerst aufmerksam machte, beobachtet. Und bis eine solche Abweichung gefunden ist, scheint es mir, daß kein Beweisstück über die Existenz elektrischer Ladungen, die kleiner als die eines Elektrons sind, angeführt werden kann; denn einige der Änderungen in irgend einer Reihe von Ladungen, die von einem Partikel getragen werden, werden durch das Fangen von Ionen verursacht, und das vielfache Verhältnis zeigt, daß alle anderen Ladungen, die in den Experimenten vorkommen, ganze Vielfache dieser Ionenladung sind.

§ 4. Die wesentlichen Elemente in der Bestimmung des absoluten Wertes e durch die Tropfmethode.

Es wäre sehr bedauerlich, könnten die Ladungen an verschiedenen Tröpfchen nicht auf ein gemeinsames Maß reduziert werden, d. h. wenn eine absolute Bestimmung von e nicht gemacht werden könnte. Aber meine Experimente¹⁾ zeigen, daß diese Berechnungen in der Tat mit ungewöhnlicher Übereinstimmung gemacht werden können, wenn man das einzig berechnete Verfahren benutzt, die Geschwindigkeit des geladenen Körperchens in einem bestimmten elektrischen Felde mit der durch die Wirkung einer bekannten Kraft, wie die Schwerkraft mg , zu vergleichen. Dieser Vergleich kann nicht gemacht werden, es sei denn, man kenne die Masse m des

1) Phys. Rev. 2. p. 109. 1913; 32. p. 393. 1911.

Körperchens und die Größe seiner Oberfläche S , die es der Reibung des Mediums darbietet, und dann sogar nur, wenn man auch das Verhältnis zwischen der wirkenden Kraft, der dadurch erzeugten Geschwindigkeit und der Oberfläche, die der Reibung des Mediums ausgesetzt ist, kennt. Dieses Verhältnis kennen wir durch die Stokessche Theorie und die Arnoldschen Experimentalarbeiten genau (Phil. Mag. **22**, p. 755. 1911), aber nur, wenn die Unhomogenitäten des Mediums unendlich klein im Vergleich zu der Größe des Körperchens sind. Es gibt daher nur eine mögliche Methode, e zu bestimmen, nämlich die Grenze zu finden, der, durch die Annahme des Stokesschen Gesetzes, der scheinbare Wert von e sich nähert, wenn die Größe des Tröpfchens oder der Druck des Gases vergrößert wird, um die Bedingungen zu erfüllen, die in der Stokeschen Theorie angenommen und in Arnolds und Silveys¹⁾ Experimentalarbeiten erfüllt wurden. Tut man das, so verschwinden alle Unregelmäßigkeiten in den Messungen ganz und gar, und man bekommt für e eine außergewöhnlich konstante Größe, wie meine veröffentlichten Resultate schon zeigten²⁾, und wie andere, die weiter unten besprochen werden, noch besser zeigen, sogar wenn die Größen der Halbmesser der Tröpfchen so verschieden gemacht werden, daß sie auch in das Gebiet kommen, in welchem Ehrenhaft arbeitet.

Ehrenhaft bekam aber große Unregelmäßigkeiten in dem mit Hilfe des Stokesschen Gesetzes berechneten Werte von e , und diese deutete er als Veränderungen in der Elementarladung. Hr. Fletcher und ich zeigten jedoch, daß solche Unregelmäßigkeiten wegen der Brownschen Bewegung³⁾ zu erwarten seien, wenn eine sehr kleine Auf- und Niederbewegungslänge gebraucht wird und wenn die Zeit der Auf- und Niederbewegung nur einmal genommen, wie es in Ehrenhafts Experimenten getan wird. Wir zeigten durch unsere Experimentalarbeit ferner, daß die Brownsche Bewegung unter den Verhältnissen seiner Experimente gerade diese Unregelmäßigkeiten, die er beobachtet, erklärt. Ferner wiesen wir

1) O. W. Silvey, Phys. Rev. (2); 7, p. 106, 1916.

2) Physik Zeitschr. **12**, p. 161. 1911. Vgl. auch Phys. Rev. **32**, p. 393. 1911 und **2**, p. 100. 1913.

3) Physik. Zeitschr. **12**, p. 161. 1911; vgl. auch Phys. Rev. **32**, p. 393. 1911.

darauf hin, daß seine mittleren Werte nur dann um eine Zahl herum schwankten, die für e zu klein war, wenn er mit sehr schweren Metallen, wie Platin, Gold oder Quecksilber, arbeitete, was vielleicht dem Umstand zuzuschreiben ist, daß seine Partikel unregelmäßige Formen oder Oxyde oder andere Verbindungen von kleinerer mittlerer Dichtigkeit waren, als die er angenommen hatte. Da er weder dann noch jetzt Übereinstimmung in den Werten von e mit verschiedenen Tröpfchen bekommt und doch in jedem Falle seine Ladungen durch das Fangen von gerade denselben Ionen ändert, die — wie meine Experimente zeigen — immer genau dieselben Ladungen tragen, so ist es augenscheinlich ungereimt anzunehmen, daß diese Ionenladungen in einem Falle einen bestimmten Wert annehmen, wenn sie durch eine Art Körperchen gefangen werden, und in einem anderen Falle wieder einen anderen Wert für andere Körperchen annehmen. Seine Schwierigkeiten müssen nötigerweise in einer falschen Annahme über die Formen, die Dichtigkeit oder die Größe oder das Fallgesetz seiner Partikeln gesucht werden.

§ 5. Die neuen Beweisstücke.

Trotzdem Ehrenhaft die Gültigkeit unserer Beweise nicht zugab, so wurden sie allgemein als entscheidend angesehen (vgl. Pohls „Bericht über e “, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 8. p. 431). Sogar Przibram, der mit Ehrenhaft zusammengearbeitet hatte und zuerst auch seine Ansichten annahm, schreibt mir, daß, trotzdem seine Arbeiten auf diesem Felde „mit solch großem Irrtum angefangen waren, sie jetzt (1912) in guter Übereinstimmung mit den meinigen stünden“.

Ganz kürzlich jedoch haben Ehrenhaft¹⁾ und zwei seiner Schüler Zerner²⁾ und Konstantinowsky³⁾ einen neuen Beweis der Existenz eines Subelektrons veröffentlicht, und dies macht es nötig, den Wert dieser neuen Beweise zu besprechen. Die neuen Resultate sind genau so wie die alten, mit Ausnahme der folgenden Einzelheiten:

1) F. Ehrenhaft, Wien. Ber. 123. p. 53—155. 1914; Ann. d. Phys. 44. p. 657. 1914.

2) F. Zerner, Physik. Zeitschr. 16. p. 10. 1915.

3) D. Konstantinowsky, Ann. d. Phys. 46. p. 261. 1915.

1. Große Vorsichtsmaßregeln werden nun getroffen, das Gas frei von Sauerstoff zu bekommen, um die Möglichkeit der Oxydbildung zu verhindern. Auf Grund dieser Vorsichtsmaßregel und weil einige Quecksilbertröpfchen — die zehn- und mehrmal größere Durchmesser haben als die, welche er in seinen Experimenten gebraucht —, wenn mikrophotographisch beobachtet, sphärisch erscheinen und metallischen Glanz zeigen, nimmt er an, daß alle seine ultramikroskopischen Körperchen auch sphärisch und nicht verunreinigt sind.

Nach meiner Meinung ist dieser Beweis ganz und gar nicht überzeugend, und Ehrenhaft hat bis jetzt noch nicht auf die Kritik geantwortet, daß seine Unregelmäßigkeiten in einer falschen Annahme über die Form, oder die Dichte, oder die Größe, oder das Fallgesetz seiner Körperchen gesucht werden müssen. Ich werde weiter unten zeigen, daß — nach Ehrenhafts eigenen Daten — ein starker Verdacht für eine Erklärung in solcher Richtung besteht. Daß einige große Quecksilbertröpfchen, die er photographiert, sphärisch erscheinen, ist kein Beweis, daß alle Körperchen sphärisch sind, besonders Partikel, die nur ein Zehntel oder ein Hundertstel so groß sind als die, welche man photographieren kann. Daß er sein Gas sorgfältig von Sauerstoff befreit, ist ganz und gar kein Grund, anzunehmen, daß, wenn ein elektrischer Bogen zwischen Metallen erzeugt wird, nicht irgend eine Verbindung zwischen den Metallen und den Gasen, die in den Elektroden gebunden sind, stattfindet. Was diesen Punkt anbetrifft, so weiß ich von meinen eigenen Experimenten, daß unter solchen Umständen ein träges Gas, wie Stickstoff, außerordentlich tätig wird und höhere Stickstoffverbindungen eingeht.

Die Tatsache, daß diese niedrigen Werte nur mit Substanzen, wie Quecksilber, gefunden werden, deren Dichte durch das Zusetzen eines Oxyds stark verringert würde, ist ein sehr verdächtiger Umstand; denn wenn die Dichte des Tröpfchens kleiner ist als die angenommene Dichte, so würde der scheinbare Wert von e dann zu niedrig kommen. Es sind diese niedrigen Werte von e , die Ehrenhaft immer erhält, wenn er irgend welche Unregelmäßigkeiten findet.

2. Der zweite neue Beweis ist wie folgt: Im Jahre 1911 verbanden Hr. Fletcher und der Verfasser im Ryerson-

Laboratorium zuerst die Beobachtungen über die Auf- und Niederbewegungen sehr kleiner Tröpfchen durch ein Gas unter elektrischer und Schwerkraft mit Beobachtungen über die Brownschen Bewegungen derselben Tröpfchen¹⁾ in demselben Gase, wenn die Erdschwere von einem elektrischen Felde ausgeglichen war, und konnten so ganz und gar die Dichte des Tröpfchens und den Widerstandsfaktor des Mediums eliminieren und, wenn die Einstein-Brownsche Bewegungs-gleichung

$$(1) \quad \overline{\Delta x^2} = \frac{2 R T}{N K} \tau$$

richtig ist, das Produkt Ne mit Genauigkeit in der Form

$$(2) \quad Ne = \frac{4 R T (v_1 + v_2)_0}{\pi K F (\Delta x)^2} \tau$$

schreiben.

Diese Gleichung stellt nur das Fortschaffen des Widerstandsfaktors K aus der charakteristischen Gleichung der Öltropfmethode dar, nämlich

$$(3) \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{mg}{F e_n - mg}, \quad \text{oder} \quad e = \frac{mg}{F v_1} (v_1 + v_2)_0 = \frac{K}{F} (v_1 + v_2)_0$$

und von (1), welche vom Standpunkte des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes auch in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$(4) \quad (\overline{\Delta x})^2 = \frac{4 R T}{\pi N K} \tau.$$

Nun fanden wir nach dieser Methode das Produkt Ne gleich dem gefundenen in Elektrolyse.²⁾ Im Jahre 1914 aber glaubt Ehrenhaft seine Quecksilberpartikel derselben Prüfung unterzogen zu haben und findet, daß mit sechs oder sieben seiner

1) Prof. Ehrenhaft schreibt diesen Fortschritt E. Weiss zu und beachtet nicht die von diesem Laboratorium ausgegangenen Arbeiten.

2) Der Verfasser gab eine kurze Zusammenfassung dieser Arbeiten in Science, 17. Februar 1911. Hr. H. Fletcher gab einen volleren Auszug in der Physik. Zeitschr., 12. März 1911, p. 202—208, und in Le Radium, 8. p. 279. 1911. Vgl. auch H. Fletcher, Phys.-Rev. 33. p. 81. 1911 und R. A. Millikan, Phys. Rev. 1. p. 218. 1913. Am 6. Juli 1911 gab E. Weiss gleichartige Beobachtungen vor der Wien. Akad. d. Wiss. Abt. IIa. 120^a p. 1020 und fand das Produkt Ne auch gleich dem in Elektrolyse. Er gebraucht seine Daten nicht wie ich, sondern nimmt N von anderen Bestimmungen und bestimmt dann e .

neuen Partikel, über die er Daten¹⁾ veröffentlicht hat, das Produkt Ne etwas kleiner sei als in Elektrolyse, obgleich es in zwei oder drei dieser neun nicht niedriger herauskommt. *Diese zwei Punkte enthalten Ehrenhafts ganzen Zusatz sei 1909 in der vorliegenden Sache.*

Es ist jedoch interessant, zu bemerken, daß jetzt im Jahre 1914 Ehrenhaft schließlich in der Lage ist, den bedeutenden Schluß bekanntzumachen, daß Elektrizität atomistisch aufgebaut sei, weil er nun auch das vielfache Verhältnis zwischen den Ladungen findet, die von einzelnen Partikeln getragen werden.

§ 6. Die Brownsche Bewegungsmethode und die Fallgesetzmethode über die Bestimmung von e .

Ich will nun zuerst einige allgemeine Bedingungen anführen, die erfüllt werden müssen, um verlässliche Resultate über die Bestimmung von e zu erzielen, entweder durch die Brownschen Bewegungen oder auch durch die Fallgesetzmethode. Auch will ich zeigen, warum — nach meiner Ansicht — Ehrenhaft und seine Schüler abweichende Resultate erzielten; zweitens will ich erörtern, welchen Einfluß ihre Resultate, wie auch ihre Zuverlässigkeit sein möge, auf die Frage über die Existenz eines Subelektrons haben können.

Die Brownsche Bewegungsmethode über die Bestimmung von e besteht einfach in der Bestimmung von Ne , wie es oben beschrieben ist, dem Einsetzen eines *angenommenen* Wertes von N und der Auflösung für e . Trotzdem es möglich ist, die Bestimmung von Ne in der Art und Weise, wie oben beschrieben ist, zu machen, und trotzdem es mit einem oder zwei unserer Tröpfchen so getan wurde, so arbeitete Hr. Fletcher eine bequemere Methode aus, welche erfordert, die Beweglichkeiten Δx im Verhältnis der Schwankungen der Zeiten, während der die Partikel über eine gewisse Strecke fällt, auszudrücken, was daher die Notwendigkeit, das Tröpfchen zum Stillstehen zu bringen, nicht mehr verlangt. Ich werde eine andere Ableitung dieses Verhältnisses geben, die sehr einfach und doch von unzweifelhafter Gültigkeit ist.

In Gleichung (2) sei τ die nötige Zeit, die der Partikel braucht, um zwischen einer Reihe von gleichmäßigen Ab-

1) F. Ehrenhaft, Wien. Ber. 123, p. 52. 1914.

ständen, deren Weite voneinander gleich d ist, zu fallen, wenn keine Brownsche Bewegung stattfindet. Durch diese Bewegungen jedoch wird die Partikel in der Zeit τ eine Strecke Δx auf oder nieder bewegt worden sein. Nehmen wir an, er wäre nach oben gegangen. Dann würde die wirkliche Fallzeit $\tau + \Delta \tau$ sein, wo $\Delta \tau$ nun die Zeit ist, die es gebraucht, über die Strecke Δx zu fallen. Wenn nun $\Delta \tau$ klein ist im Vergleich mit τ , d. h. wenn Δx klein ist im Vergleich mit d (z. B. $\frac{1}{10}$ oder weniger), so führen wir einen zu vernachlässigenden Fehler (im größten Falle ca. $\frac{1}{100}$) ein, wenn wir annehmen, daß $\Delta x = v_1 \Delta t$, wo v_1 die mittlere Geschwindigkeit unter Schwerkraft ist. Schreiben wir also in (2)

$$v_1^2 \overline{\Delta t^2} \text{ für } \overline{\Delta x^2},$$

worin $\overline{\Delta t^2}$ das Quadrat der mittleren Unterschiede, ohne auf ihre Zeichen zu achten, zwischen einer beobachteten und der mittleren Fallzeit t_0 ist, oder mit anderen Worten, das Quadrat der mittleren Schwankungen in der Zeit des Falles durch die Strecke d ist, so erhalten wir, indem die ideale Zeit τ durch die mittlere Zeit t_0 ersetzt wird:

$$(5) \quad Ne = \frac{4RT(v_1 + v_2)t_0}{\pi F v_1^2 \overline{\Delta t^2}}.$$

In Wirklichkeit wird natürlich $\overline{\Delta t^2}$ viel kleiner als $\frac{1}{10}$ der mittleren Zeit t_0 gehalten, wenn die Unregelmäßigkeiten, hervorgerufen durch die persönlichen Fehler des Beobachters, nicht zu groß sind, um die Unregelmäßigkeiten durch die Brownschen Bewegungen zu verhüllen, so daß dann (5) praktisch für alle Beobachtungszustände gut genug ist. Hr. Fletchers Arbeiten und die des Verfassers wurden nach beiden Methoden ausgeführt, die in den Gleichungen (2) und (5) angeführt werden. Der Unterschied ist, daß man in der Arbeit nach Gleichung (2) das Tröpfchen wirklich im Gleichgewicht hält und dann eine große Reihe Δx -Messungen macht, so wie bei den Messungen der Brownschen Bewegungen in Flüssigkeiten. Man zerstört dann dieses Gleichgewicht und,

1) Es wird hier kein Fehler eingeführt, wenn, wie angenommen ist, Δt klein ist im Vergleich mit t_0 . Für genauere Gleichungen vgl. H. Fletcher, Phys. Rev. 4. p. 442. 1914; vgl. auch M. v. Smoluchowski, Physik. Zeitschr. 16. p. 321. 1915.

durch Änderungen der Zahl der Elektronen an dem Tröpfchen, nimmt eine Reihe Messungen über $(v_1 + v_2)$, worin eine große Okularlinienstrecke und ein konstantes Feld gebraucht wird. Das größte gemeinsame Maß dieser Reihe ist dann $(v_1 + v_2)_0$.

In den Messungen nach Gleichung (5) hält man das Tröpfchen gar nicht im Gleichgewicht, sondern berechnet Ne von $(v_1 + v_2)_0$, das man so wie oben erhält, und dem Quadrat der Schwankungen $\overline{\Delta t^2}$ in den Fallzeiten zwischen zwei Okularlinien, zwischen denen das Tröpfchen durchschnittlich in der Zeit t_g fällt. Die erste Methode enthält nur die Ungenauigkeiten, die in allen Brownschen Bewegungsarbeiten vorkommen. Sie soll verlässliche Resultate ergeben, wenn $\overline{\Delta x}$ groß genug ist, um mit einiger Genauigkeit gemessen zu werden, und wenn genug Verschiebungen Δx genommen werden, daß man die statistischen Gesetze auf den Mittelwert anwenden kann. Hunderte und sogar tausende dieser Verschiebungen wurden gewöhnlich in allen sorgfältigen Arbeiten über Brownsche Bewegungen beobachtet. Die Methode der Gleichung (5) jedoch enthält die folgenden zwei Ungenauigkeiten, die sehr groß sein können:

1. Die persönlichen Fehler eines Beobachters, eine Reihe Vorgänge, die in genau denselben Zeitabständen vorkommen, zu messen, sind im allgemeinen ein Zehntel oder sogar zwei Zehntel einer Sekunde, also mehr oder weniger vom Beobachter abhängig. Wenn man nun die Schwankungen Δt aus diesem Grunde nicht *ganz und gar vernachlässigen kann* im Vergleich mit den mittleren Schwankungen, verursacht durch die Brownsche Bewegung in der Zeit t_g , so werden die beobachteten Δt in Gleichung (5) zu groß und daher Ne zu klein ausfallen.

2. Wenn das Tröpfchen verdampft oder seine Geschwindigkeit in irgend einer Art sich regelmäßig ändert, während die Δt beobachtet werden, so werden die Veränderungen in t_g durch diesen Grund zu den durch die Brownsche Bewegung verursachten addiert, und deshalb fallen die beobachteten Δt zu groß aus. Sie können sogar einige Male größer sein als der Wert, der durch die Brownsche Bewegung hervorgerufen wird.

Schließlich ist es durchaus denkbar, daß ein Körperchen in einer anderen als sphärischen Form, z. B. spindelförmig, unter der Schwerkraft so fiel und unter Einfluß eines elektrischen Feldes so aufsteige, um immer eine kleinere Ober-

fläche dem Widerstande des Mediums darzubieten, als wenn es unregelmäßig durch den Einfluß der molekularen Stöße hin und her bewegt wird. Dieser Fall würde Ne auch zu niedrig ergeben. Ich habe niemals eine Andeutung für solch einen Einfluß gefunden; aber die vorher genannten Fehlerquellen sind wirklich vorhanden und bedeutend. Im Falle der Gleichung (5) also geben alle Fehlerquellen Ne zu klein.

Berechnen wir nun e aus dem Fallgesetz, so gebrauchen wir die folgenden zwei Gleichungen:

$$(6) \quad e_1 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{9\eta}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{g(\sigma - \varrho)} \right)^{1/2} \frac{(v_1 + v_2) v_1^{1/2}}{F}$$

und

$$(7) \quad e \left(1 + A \frac{l}{a} \right) = e_1.$$

Die Verallgemeinerung des Stokesschen Gesetzes, die durch die letzte Gleichung (7) angeführt wird, macht den Wert von e_1 natürlich größer als den von e ; aber, da dies immer in allen Berechnungen, die hier besprochen werden, in Betracht genommen wird, so steht die wirkliche Frage nur, wie die Fehlerquellen den Wert e_1 nach Gleichung (6) beeinflussen. Das einzige ungewisse Element in dieser Gleichung ist die Dichte der Partikel, und wenn man mit einem so dichten Metalle wie Quecksilber oder Gold arbeitet, so werden alle Oberflächenverunreinigungen oder Verunreinigungen irgend einer Art den Partikel weniger dicht als angenommen und daher e_1 zu klein erscheinen lassen. Mit einem Staubkörperchen von lockerem Aufbau kann e_1 viele Male zu klein ausfallen.

Die Methode der Brownschen Bewegung ist also unabhängig von der Dichte, und vielleicht nicht merklich abhängig von der Form; die Fallmethode ist jedoch von beiden abhängig, so daß, wenn beide Methoden richtig ausgeführt werden, eine falsche Annahme über die Dichte oder Form den Wert e durch die Fallmethode kleiner erscheinen lassen würde als den Wert durch die Brownsche Bewegung. Alle neun Partikel, die von Hrn. Fletcher und mir in den Jahren 1910 und 1911 studiert und von Hrn. Fletcher¹⁾ berechnet wurden, gaben den richtigen Wert von Ne , während nur sechs von

1) H. Fletcher, *Le Radium* 8. p. 279. 1911; *Phys. Rev.* 33. p. 107. 1911.

ihnen, von mir berechnet, an oder nahe der $e_1^{1/2}$, l/a - oder $e_1^{1/4}$, $1/pa$ -Linie fielen, die das Fallgesetz eines Öltröpfchens durch die Luft ¹⁾ darstellt. Diese letzte Tatsache wurde nicht 1911 veröffentlicht, da es mir erst 1913 gelang, das Fallgesetz eines Tröpfchens durch die Luft vollständig zu bestimmen, mit anderen Worten, die Linien der Art — wie Fig. 1 p. 759 zeigt — zu solch großen Werten auszudehnen, die den Partikeln entsprechen, welche klein genug sind, um große Brownsche Bewegungen zu zeigen. Als ich das getan hatte, berechnete ich alle neun Tröpfchen, welche richtige Werte über Ne gegeben hatten, und fand, daß zwei derselben weit unter die $e_1^{1/4}$, l/a -Linie fielen; eins fiel etwas niedriger, während eins beträchtlich höher fiel. Dies sagt unverkennbar, daß diese vier Partikel keine Öltröpfchen waren; zwei von ihnen fielen viel zu langsam und eins beträchtlich zu schnell, um Ölpartikel zu sein. Es war nichts Überraschendes in diesen Resultaten; denn ich erklärte schon in meinen ersten Berichten über Öltröpfchen vollständig ²⁾, daß — bis ich die größten Vorsichtsmaßregeln nahm, um wirklich staubfreie Luft zu bekommen — „die Werte von e_1 etwas verschieden herauskamen, sogar mit den Tröpfchen, die dieselbe Geschwindigkeit unter Erdschwere zeigten“. In den Arbeiten mit der Brownschen Bewegung waren keine solchen Vorsichtsmaßregeln, um staubfreie Luft zu bekommen, genommen, da wir die *allgemeine* Gültigkeit der Gleichungen (2) und (5) prüfen wollten. Daß wir in der Tat zu diesen Prüfungen zwei Partikel brauchten, die eine viel kleinere mittlere Dichte als die der Öltröpfchen hatten, und eins, das beträchtlich schwerer war, war sehr wünschenswert, da es anzeigte, daß unsere Resultate wirklich unabhängig von den Materialien sind.

Es ist auch bemerkenswert, daß im allgemeinen, sogar mit Öltröpfchen, beinahe alle, die sich unregelmäßig verhalten, zu langsam fallen, d. h. sie fallen unter die Linie in Fig. 1, p. 759; nur selten fällt eins darüber. Der Grund hierfür ist, daß die Staubkörperchen, die man leicht mit beobachtet, d. h. diejenigen, die lange in der Luft hängen bleiben, entweder leichter sind als Öl oder eine größere Oberfläche als Öltröpfchen darbieten, und daher *scheinen* sie leichter zu sein. Arbeitet

1) Phys. Rev. 2. p. 136. 1913.

2) Phys. Rev. 33. p. 366 u. 367. 1911.

man mit Partikeln aus dichten Metallen, so wird dieses Verhalten noch bemerkenswerter, da Oberflächenverunreinigungen jeder Art die Dichte verringern. Die Möglichkeit jedoch, die Öltröpfchenexperimente von all diesen Fehlerquellen zu befreien, wird durch die Experimente des letzten Jahres wieder bewiesen; denn obwohl ich im ganzen über 300 Tröpfchen studiert habe, so kommt nicht ein einziges Tröpfchen vor, das weiter von der Linie wegfällt als höchstens 1 Proz.

§ 7. Ehrenhaft und Zerners Besprechung unserer Messungen an Öltröpfchen.

Um wieder auf die Behauptungen Ehrenhafts und seiner Schüler zurückzukommen, so finden sie, wie oben bemerkt, 1., daß in manchen Fällen Ne nach der Brownischen Bewegungsmethode zu klein ausfällt, und 2., daß, im allgemeinen, e nach der Fallgesetzmethode kleiner ausfällt als nach der Ne -Methode und zunehmend kleiner wird, je kleiner die Fallgeschwindigkeit und je kleiner daher die scheinbare Größe wird. Daher behaupten sie, daß sie Subelektronen gefunden hätten, daß ich aber diese nicht bemerken konnte, da ich mit zu großen Tröpfchen arbeitete. *Diese außergewöhnlich kleinen elektrischen Ladungen können nur, ihren Behauptungen nach, auf ungewöhnlich kleinen Partikeln erscheinen.*

Ehrenhaft und Zerner untersuchen sogar unsere Messungen an Öltröpfchen und finden, daß sie auch scheinbar in einigen Fällen ein Zeichen eines Subelektrons aufweisen; denn sie geben in den Händen dieser Beobachter zu niedrige Werte von e , ob sie nach den Brownischen Bewegungen oder nach den Fallgesetzbestimmungen berechnet werden. Und wenn die Berechnungen von e in dieser Weise gemacht werden, so wird — nach ihnen — gefunden, daß e mit abnehmendem Halbmesser kleiner wird, gerade so wie in ihren Experimenten an Quecksilber- und Goldpartikeln.

Den einzigen niedrigen Wert über Ne jedoch, den sie in unseren Arbeiten finden, erreichen sie durch die Berechnung von Ne von etwa 25 Beobachtungen über die Fallzeit und von derselben Zahl der Aufwärtsbewegung einer Partikel, über die wir berichteten¹⁾, noch ehe wir irgend eine Ne -Berechnung gemacht hatten, um zu zeigen, daß die Brownischen

1) Physik. Zeitschr. 12. p. 162. 1911.

Bewegungen gerade solche Unregelmäßigkeiten hervorbrachten, wie sie Ehrenhaft beobachtet hatte.

Besprechen wir zuerst diese Öltröpfchen. Obgleich es augenscheinlich ist, daß, im allgemeinen, sehr wenig Bedeutung auf die Versuche gelegt werden kann, einen statistischen Satz mit so wenigen Beobachtungen, die wir in dem Falle dieses Tröpfchens genommen hatten, zu prüfen, so kommt doch — nach Hrn. Fletchers Berechnungen¹⁾ der Daten, die er und ich²⁾ über dieses Tröpfchen veröffentlichten — der Wert Ne auf weniger als 2 Proz. Abweichung vom richtigen Werte 9650 heraus, anstatt mit einer Abweichung von 30 Proz., wie Ehrenhaft und Zerner sie finden. Wenn ich jedoch Ne nach Gleichung (5) berechne und nur 25 Fallzeiten gebrauche, so finde ich den Wert auch um 26 Proz. zu niedrig wie Zerner. Lasse ich jedoch die erste Beobachtung aus, so kommt das Resultat nur um 11 Proz. zu niedrig heraus. Mit anderen Worten, mit dem Fortlassen einer einzigen Beobachtung ändert sich das Resultat um 15 Proz., und verschiedene andere Gruppierungen derselben Beobachtungen machen den 30-Proz.-Unterschied zwischen Fletchers und Zerners Resultaten. Dies zeigt deutlich die Unzulänglichkeit der Versuche, einen statistischen Satz mit nur 25 Beobachtungen zu prüfen, *die jedoch zahlreicher sind, als Ehrenhaft sie bei seinen Partikeln nimmt*. Weiter habe ich schon gezeigt, daß, wenn der Beobachter nicht unter sorgsam gewählten Verhältnissen arbeitet, dann seine eigenen Beobachtungsfehler und das langsame Verdampfen des Tröpfchens bewirken, daß der Wert von Ne von Gleichung (5) zu niedrig wird, und diese Fehler können leicht groß genug sein, das ganze Resultat untauglich zu machen. *Es ist also nicht das geringste Zeichen in irgend einer Arbeit vorhanden, die wir mit Öltröpfchen ausgeführt haben, daß Ne zu klein herauskommt.*

Betrachten wir nun die scheinbare Unregelmäßigkeit von e , wenn es durch das Fallgesetz berechnet wird. Zerner berechnet e nach meinem Fallgesetz für die neun Tröpfchen, die Fletcher veröffentlichte, in denen Ne auf denselben Wert kam wie in Elektrolyse, und findet, daß eins derselben $e = 6,66 \cdot 10^{-10}$ gibt; ein anderes gibt $e = 3,97 \cdot 10^{-10}$, das

1) H. Fletcher, Physik. Zeitschr. 16. p. 316. 1915.

2) R. A. Millikan, Physik. Zeitschr. 12. p. 162. 1911.

dritte $e = 1,32 \cdot 10^{-10}$, das nächste $1,7 \cdot 10^{-10}$, während die anderen fünf ungefähr den richtigen Wert, nämlich $4,8 \cdot 10^{-10}$, geben. Mit anderen Worten, wie ich schon oben erwähnt habe (vgl. p. 748), fünf dieser Tröpfchen fallen genau an meine Linie (Fig. 1, p. 759); eins fällt etwas darüber, eins etwas darunter, während zwei weit herausfallen und viel zu niedrig werden. Ich schloß daher, daß diese letzteren zwei keine Öltröpfchen, sondern Staubpartikel seien.

Da Zerner den Halbmesser aus der Fallgeschwindigkeit berechnet, so müssen diese zwei Staubpartikel, die viel zu lange fallen und daher zu kleine Werte von e geben, auch entsprechend kleine Werte von a geben. Da dies der Fall war, so schließt Zerner, daß unsere Öltröpfchen gerade wie Ehrenhafts Quecksilberpartikel kleinere Werte von e mit abnehmendem Halbmesser ergeben. Seine eigene Tabelle zeigt das aber durchaus nicht. Sie zeigt nur drei fehlerhafte Werte von e , zwei von ihnen sehr niedrig und einen ziemlich hoch. Aber ein Überblick über alle anderen Daten, die ich über Öltröpfchen veröffentlicht habe, zeigen den gänzlichen Irrtum dieser Ansicht¹⁾; denn diese Daten zeigen, daß, nachdem ich Staub gänzlich beseitigt hatte, alle meine Partikel genau denselben Wert von e ergeben, wie auch ihre Größen sein mögen.²⁾ Die einzig mögliche Erklärung daher, die das Verhalten dieser zwei Partikel, welche richtige Werte für $N e$ gaben, aber zu kleine Fallgeschwindigkeiten hatten, rechtfertigt, ist die, welche ich gab, nämlich, daß sie gar keine Öltröpfchen waren.

§ 8. Die Wiener Daten über Quecksilber und Gold.

Was die Wiener Daten über Quecksilber und Gold anbelangt, so veröffentlicht Ehrenhaft im ganzen nur Daten über 16 Partikel und nimmt für seine Berechnungen der Browneschen Bewegung durchschnittlich nur 15 Auf- und 15 Niederbewegungszeiten eines jeden Partikels. Die kleinste dieser Zahlen ist 6 und die größte 27. Er berechnet dann seinen statistischen Mittelwert $(\Delta t)^2$ mit Gleichung (5) aus einer solchen unzulänglichen Zahl von Beobachtungen. Dann nimmt er Perrins Wert von N an, nämlich $70 \cdot 10^{22}$, dem $e = 4,1$ entspricht, und erhält dann anstatt dieses Wertes durch die

1) Phys. Rev. 2. p. 138. 1913.

2) Phys. Rev. 2. p. 134 u. 135. 1913.

Brownsche Bewegung, nämlich die *Ne-Methode*, die folgenden Werte von e (das exponentiale Glied ist der Kürze wegen ausgelassen): 1,43, 2,13, 1,38, 3,04, 3,5, 6,92, 4,42, 3,28, 0,84. Lassen wir die ersten drei und den letzten Wert aus, so kommt der Mittelwert von e ungefähr auf das, was er sein sollte — in der Tat ein wenig zu hoch als zu niedrig —, nämlich auf 4,22 anstatt auf 4,1. Und weiter, die ersten drei Partikel sind die schwereren; der erste fällt zwischen seinen Okularlinien in 3,6 Sek., und seine Schwankungen in der Fallzeit sind von 3,2—3,85 Sek. oder nur drei Zehntel einer Sekunde auf beiden Seiten des Mittelwertes. *Diese Schwankungen sind jedoch nur wenig größer als die, welche ein gewöhnlicher Beobachter in der Zeitmessung über den Fall eines gleichmäßig fallenden Körperchens zwischen Okularlinien von gleichmäßigen Abständen macht.* Das heißt, daß in diesen Beobachtungen zwei beinahe gleich große Ursachen der Grund dieser Schwankungen waren. Die beobachteten Δt waren also natürlich größer als die, welche nur durch die Brownschen Bewegungen hervorgerufen wurden, und konnten leicht — da nur so wenige Beobachtungen genommen worden waren — zwei- oder dreimal zu groß sein, welcher Umstand das Produkt Ne nun vier zu neun Malen verringert hätte. *Es ist also nur, wenn der mittlere Fehler des Beobachters ganz und gar vernachlässigt werden kann, im Vergleich mit den Schwankungen, verursacht durch die Brownschen Bewegungen, daß diese Methode nicht zu niedrige Werte von e ergibt.* Die Übersicht dieser Tatsache ist nach meiner Meinung der Grund einiger der niedrigen Werte von e , die Ehrenhaft erhält.

Und auch in den ursprünglichen Arbeiten an Quecksilbertröpfchen, die ich entweder durch Zerstäubung flüssigen Quecksilbers oder durch die Kondensierung der Dämpfe von siedendem Quecksilber erhielt¹⁾, zeigte ich, daß solche Tröpfchen eine Zeitlang noch schneller verdampfen wie Öl, und andere Beobachter²⁾, welche seitdem mit Quecksilber gearbeitet haben, konstatieren dieselbe Tatsache. Die Größe dieser Wirkung kann nach der folgenden Tatsache beurteilt werden: Ein bestimmtes Quecksilbertröpfchen, das kürzlich

1) Phys. Rev. 32. p. 389. 1911.

2) Vgl. Schidlof u. Karpowicz, Compt. rend. 158. p. 1092. 1915.

in diesem Laboratorium beobachtet wurde, hatte zuerst eine Geschwindigkeit unter Erdschwere von 1 cm in 20 Sek., nach einer halben Stunde jedoch nur noch 1 cm in 56 Sek. Das langsame Aufhören dieses Verdampfens jedoch zeigt, daß das Tröpfchen nach und nach langsam durch irgend eine beschützende Haut überzogen wird. Findet nun eine solche Verdampfung statt, während aufeinanderfolgende Fallzeiten beobachtet werden, so kann das scheinbare $(\Delta t)^2$ leicht einige Male größer sein als das durch die Brownschen Bewegungen hervorgerufene, obwohl diese Bewegungen groß genug sind, um es für den Beobachter unmöglich zu machen, zu beobachten, daß sich das Tröpfchen in den 20 oder 30 Messungen fortwährend ändert. Es ist daher auf Grund dieses Verhaltens der Quecksilbertröpfchen wahrscheinlich, daß Ehrenhafts $(\Delta t)^2$ -Messungen wegen der Verdampfung oftmals zu groß waren. *Es ist daher, wie mir scheint, gar kein Beweis in irgend welchen Daten, die von Ehrenhaft bis zur jetzigen Zeit veröffentlicht sind, daß die Brownsche Bewegung wirklich zu kleine Werte für $N e$ gibt.*

Konstantinowskys Daten sind dieselben wie Ehrenhafts, insofern die Möglichkeit, zu niedrige Werte für $N e$ durch Beobachtungsfehler und Verdampfen zu erhalten, noch besteht; aber sie betonen noch eine weitere Fehlerquelle, die den Verfasser scheinbar ganz und gar irreführt. Er veröffentlicht Beobachtungen über $N e$ an nur elf Partikeln¹⁾, von denen fünf den Wert e zwischen $3,3$ und $4,2 \cdot 10^{-10}$ ergeben, oder rohe richtige Werte, wenn man seinen Wert über $N = 70 \cdot 10^{22}$ annimmt; drei der anderen geben ungefähr $2 \cdot 10^{-10}$, zwei andere ungefähr $1 \cdot 10^{-10}$, während eins $0,5 \cdot 10^{-10}$ gibt. Seine Bestimmung der vielfachen Ladungen, nach der er das größte gemeinsame Maß $(v_1 + v_2)_0$ erhält [vgl. Gleichung (6)], ist jedoch so unregelmäßig und unzuverlässig, daß er die Frage stellt, ob wirklich ein solches größtes gemeinsames Maß vorhanden sei, trotzdem alle anderen Beobachter, wenigstens ein Dutzend, und auch Ehrenhaft selbst, jetzt dieses exakte vielfache Verhältnis immer vorfinden.

Aber eine Ungenauigkeit in $(v_1 + v_2)_0$ [vgl. Gleichung (6)] gibt eine gleiche Ungenauigkeit in $N e$. Einige der niedrigen Werte von $N e$ in Konstantinowskys Arbeiten kommen

1) Ann. d. Phys. 46. p. 292. 1915.

daher nach meiner Meinung durch die falsche Bestimmung von $(v_1 + v_2)_0$. Aber mit Apparaten und Partikeln von solcher Kleinheit ist es gar nicht überraschend, daß er das größte gemeinsame Maß der Geschwindigkeitsreihe nicht genauer finden kann. *Es müssen mehr Beobachtungen, als er gewöhnlich an einem Partikel nimmt, gemacht werden, um dieses Maß zu bestimmen, da die Brownschen Bewegungen seiner Partikel so groß sind, und da die Feldstärke, die er gebraucht, so schwach ist (in manchen Fällen nur 9 Volt an Kondensatorplatten 2 mm voneinander entfernt), und die Tröpfchen daher verhältnismäßig hoch geladen sind.*

Untersuchen wir nun, warum Ehrenhafts Daten zeigen, daß — nehmen wir kleiner und kleinere Tröpfchen — die Werte von a und e (nach der Fallgesetzmethode berechnet) sich weiter und weiter von den Werten von a und e (nach den Brownschen Bewegungen berechnet) entfernen. Um dies zu tun, ist es nur nötig, den Einfluß der Dichte der Tröpfchen in den zwei Methoden zu vergleichen.

Die Methode der Brownschen Bewegung, so wie er sie gebraucht, besteht zuerst darin, die Gleichung (4) für K zu lösen, nachdem Perrins Wert über N eingesetzt ist. [Mein K ist sein l/B , und (4) auf seine Beobachtungsweise bezüglich zu schreiben, muß $\overline{\Delta x^2}$ durch $v_1^2 \overline{\Delta t^2}$ und τ durch t , ersetzt werden.] Kennt man K genau, so kann man m und e aus den Gleichungen erhalten, die ich in meinen ersten Öltröpfchenarbeiten experimentell bewiesen habe, nämlich:

$$(8) \quad mg = Kv$$

und

$$(9) \quad e = \frac{K}{F} (v_1 + v_2)_0.$$

Soweit ist keine Annahme über die Dichte oder sphärische Form des Tröpfchens nötig. Will man jedoch a finden, so muß man es durch die Annahme eines sphärischen Tröpfchens tun, nämlich:

$$m = \frac{4}{3} \pi a^3 (\sigma - \varrho),$$

welches mit (8)

$$(10) \quad a = \sqrt[3]{\frac{3 K v_1}{4 \pi (\sigma - \varrho) g}}$$

ergibt.

Diese Gleichungen zeigen, daß irgend eine falsche Annahme über die Dichte σ des Tröpfchens keinen Einfluß auf e (8) hat, daß sie aber a (10) beeinflusst, z. B. ein 9-Proz.-Fehler kommt in $(\sigma - \varrho)$ wegen der Kubikwurzel als ein 3-Proz.-Fehler in a heraus.

Berechnet man aber e und a aus dem Fallgesetz, so sehen wir aus Gleichung (6), p. 747, da e proportional zu $1/(\sigma - \varrho)^{1/2}$ ist, daß ein Fehler von 9 Proz. in $(\sigma - \varrho)$ wegen der Quadratwurzel einen Fehler von $4\frac{1}{2}$ Proz. in e bedingt. Und wieder, aus $mg = 6\pi\eta av$, oder

$$(11) \quad \frac{4}{3} \pi a^3 (\sigma - \varrho) g = 6 \pi \eta a v_1$$

sieht man, daß

$$(12) \quad a = \sqrt{\frac{9 \eta v_1}{2 (\sigma - \varrho) g}},$$

daß also ein Fehler von 9 Proz. in $(\sigma - \varrho)$ einen Fehler von $4\frac{1}{2}$ Proz. bei a herbeiführt. Nehmen wir also an, daß eine Hülle einer fremden Substanz auf das Quecksilbertröpfchen fällt, es also ein wenig leichter als reines Quecksilber macht. Dies würde den Wert von e , nach der Brownschen Bewegung berechnet, nicht beeinflussen; aber es würde den Wert von e nach der Widerstandsgleichung als zu klein ergeben, da man eine zu große Dichte in den Nenner der Gleichung (6) auf p. 747 gesetzt hat. Diese falsche Annahme über σ würde a nach (12) mehr beeinflussen als nach (10); letztere also würde a größer erscheinen lassen. Weiter, je kleiner das Tröpfchen wird, um so mehr werden die zwei Berechnungen von e verschieden sein; e nach dem Fallgesetz wird kleiner und kleiner im Vergleich zu e nach den Brownschen Bewegungen. Gleicherweise wird a — nach diesen zwei Methoden berechnet — an Verschiedenheit zunehmen; der Wert nach der Fallgesetzmethode wird mehr und mehr durch die falsche Annahme über die Dichte beeinflusst als der andere. *Nun ist dieses Verhalten genau dasselbe, welches Ehrenhaft und Konstantinowskys Messungsreihen an Partikeln von Gold und Quecksilber zeigen.* Alle diese Resultate folgen auch in derselben Weise, wenn die Ungenauigkeit nicht auf die Dichte, sondern auf die Form der Partikel fällt; denn dann ist v_1 der Gleichungen (10) und (12) zu klein, und die Partikel scheinen daher kleiner als sie sind, aber wieder kleiner nach (12) als nach (10).

Wenn wir also annehmen, daß die Einsteinsche Gleichung der Brownschen Bewegung begründet ist, so kann nur ein einziger Schluß aus Ehrenhaft und Konstantinowskys Daten gezogen werden, nämlich, daß die wenigen Partikel, über welche die Verfasser Beobachtungen veröffentlicht haben, entweder Oberflächenverunreinigungen hatten, oder keine sphärischen Formen, oder gar keine Quecksilberpartikel waren. Ich habe schon weiter oben über die aufklärende Bemerkung gesprochen, daß diese Daten alle aus Beobachtungen entnommen sind, die mit außerordentlich dichten Substanzen, wie Quecksilber und Gold, angestellt wurden, so daß alle Verunreinigungen der Substanz kleine Werte von e und a ergeben würden. Die weitere Tatsache, die Ehrenhaft andeutet, daß normale Werte von e oft in ihren Arbeiten auftauchen¹⁾, und daß diese niedrigen, fehlerhaften Tröpfchen nur einen Teil ihrer Daten ausmachen, ist sehr bemerkenswert. *Bemerkt man dann auch, daß anstatt der schönen Übereinstimmung, die mit den Öltröpfchenarbeiten vorkommt, Ehrenhaft und seine Schüler niemals Daten über zwei Partikel veröffentlicht haben, welche denselben Wert von e ergeben, sondern nur Unbeständigkeiten und regelloses Verhalten²⁾ finden,* gerade wie man es mit ungleichförmigen Körperchen oder mit Partikeln erwarten muß, zu denen Staubbeflecke gekommen sind, so ist es erstaunlich, daß eine andere Erklärung als die einer Verunreinigung der Tröpfchen, welche alle Schwierigkeiten erklärt, angenommen werden konnte. In der Tat fanden wir in unseren Arbeiten mit Quecksilbertröpfchen hier im Ryerson-Laboratorium, daß das ursprüngliche schnelle Verdampfen langsam verschwindet, gerade so, als ob die Tröpfchen mit einer fremden Hülle bedeckt würden, die den weiteren

1) Wien. Ber. 123, p. 52. 1914: „Die bei größeren Partikeln unter gewissen Umständen bei gleicher Art der Erzeugung häufig wiederkehrenden höheren Quanten waren dann etwa als stabilere räumliche Gleichgewichtsverteilungen dieser Subelektronen anzusehen, die sich unter gewissen Umständen ergeben.“

2) Ihr ganzes Argument ist in den Tabellen in den Ann. d. Phys. 44, p. 693. 1914 und 46, p. 292. 1915 zusammengefaßt, und ich möchte vorschlagen, daß sich jedermann, den diese Frage interessiert, Zeit dazu nimmt, die dort veröffentlichten Daten nachzusehen; denn die Daten selbst sind so regellos, daß sie eine Untersuchung beinahe unmöglich machen.

Verlust verhindert. Schidlof und Karpawicz finden dasselbe Verhalten ihrer Quecksilbertröpfchen, und sie finden auch ferner, daß *dieses Betragen über Verdampfung im reinsten Stickstoff wie auch in der Luft dasselbe ist.*¹⁾ Ehrenhaft selbst, die Brownsche Bewegung eines Metallpartikels besprechend, bemerkt, daß sie zuerst große Bewegungen zeigen, welche aber mit der Zeit kleiner werden.²⁾ Das ist gerade, was geschehen würde, wenn der Halbmesser durch eine fremde Hülle vergrößert wird.

Was sagt nun Ehrenhaft zu diesen sehr einleuchtenden Erklärungen des Grundes seiner Unregelmäßigkeiten? Einfach nur, daß er allen Sauerstoff vermieden hätte, und daher eine Oxydhülle unmöglich sei, und daß er einige größere Tröpfchen photographiert habe und sie sphärisch gefunden hätte. Trotzdem bekommt er seine Metallpartikel durch das Schlagen eines elektrischen Bogens zwischen Metallelektroden, und die Partikel, die hier in Frage kommen, sind nicht die, welche er photographierte; denn die sind weit unter der Grenze des Auflösungsvermögens irgend eines optischen Instrumentes. Mit einem Worte also: Ehrenhafts Bestimmungen der sphärischen Form oder Reinlichkeit sind alle ganz wertlos, wenn sie auf diese fraglichen Partikel bezogen werden, die nach ihm einen Halbmesser der Ordnung 10^{-8} cm haben, eine Größe, die viele Male kleiner ist als die Grenze des größten Auflösungsvermögens.

§ 9. Die Beziehung der Wiener Arbeiten zur Frage über die Existenz eines Subelektrons.

Nehmen wir aber an, daß Ehrenhaft und Konstantinowsky wirklich mit sphärischen Partikeln aus reinem Quecksilber und Gold arbeiten, wie sie immerhin meinen, und daß die Beobachtungs- und Verdampfungsfehler die niedrigen Werte von N_e nicht erklären, was für Schlüsse können dann rechtmäßig aus ihren Daten gezogen werden? Nichts weiter als die, daß 1. die Einstein-Brownsche Bewegungsgleichung

1) Compt. rend. Juli 1914.

2) Physik. Zeitschr. 12. p. 98. 1900: „Wie ich in meinen früheren Publikationen erwähnt habe, zeigen die ultramikroskopischen Metallpartikel, unmittelbar nach der Erzeugung beobachtet, eine viel lebhaftere Brownsche Bewegung als nach einer halben Stunde.“

nicht allgemein anwendbar ist, und 2., daß das Fallgesetz ihrer sehr kleinen geladenen Körperchen durch Luft noch nicht genau bekannt ist. Solange sie, wie Ehrenhaft jetzt auch, die exakten vielfachen Verhältnisse zwischen den Ladungen eines bestimmten Partikels finden, wenn seine Ladung durch das Auffangen von Ionen oder den Verlust von Elektronen geändert wird, so müssen die Ladungen an diesen Ionen dieselben wie die der elementaren Ladung sein, die ich zu wiederholten Malen genau gemessen habe, und die gleich $4,77 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh. ist. Denn in ihren Experimenten fangen sie genau dieselbe Art Ionen, die genau so erzeugt wurden wie die, welche ich in meinen Experimenten auffing und maß. Daß diese selben Ionen eine Art Ladung, wenn sie von größeren Tröpfchen gefangen werden, und wieder eine andere Ladung haben, wenn kleine Tröpfchen sie fangen, ist doch natürlich unglaublich. Sind diese also nicht dieselben Ionenladungen, die in diesen zwei Fällen gefangen werden, dann — um das exakte vielfache Verhältnis in Ehrenhafts und unseren Arbeiten in Einklang zu bringen — mußte angenommen werden, daß es in der Luft eine unendlich große Zahl verschiedener Ionenladungen gäbe, entsprechend einer unendlichen Zahl aller möglichen Tröpfchenhalbmesser, und daß, wenn ein starkes elektrisches Feld alle diese Ionen gegen ein gewisses Tröpfchen treibt, dieses Tröpfchen in jedem Falle gerade nur die Ladung aufnimmt, die seinem Halbmesser entspricht. Solch eine Annahme ist für ernsthafte Betrachtung nicht nur unmöglich, sondern wird durch meine Experimente direkt widerlegt; denn ich habe wiederholt bemerkt, daß mit einem gewissen Werte l/a ich genau denselben Wert von e bekomme, ob ich mit großen oder kleinen Tröpfchen arbeite.

§ 10. Neuer Beweis über die konstante Größe von e .

Um die genauesten Prüfungen über die konstante Größe von e zu machen, unternahm ich vor kurzem neue Messungen derselben Art, gleich den schon veröffentlichten, gebrauchte aber jetzt Tropfengrößen, die in das von Ehrenhaft benutzte Größengebiet hineinkommen. Auch habe ich die Art und Dichtigkeit des Gases und der Tröpfchen über weite Grenzen variiert. Fig. 1 (I) enthält neue Daten über Öltröpfchen in Luft, Fig. 1 (II) gleiche Daten in Wasserstoff

genommen. Die Halbmesser dieser Tröpfchen, berechnet nach der sehr genauen Methode, beschrieben im Physikalischen Review¹⁾ schwanken nun um das Zehnfache, nämlich von 0,000025—0,00023 cm. Ehrenhafte Grenzen sind von 0,000008—0,000025 cm. Sie zeigen, daß meine Tröpfchen in jedem Falle in die Linien in der Fig. 1 fallen, und daher alle auch genau denselben Wert von $e^{1/2}$, nämlich $61,1 \cdot 10^{-8}$ ergeben. Die Einzelheiten über die Messungen in Luft, die gerade so wie die schon veröffentlichten sind, lasse ich gänzlich aus. In den Tab. 1, 2, 3 und 4 aber sind Beispiele über vier der Tröpfchen im Wasserstoff angeführt, und in Tab. 5 sind

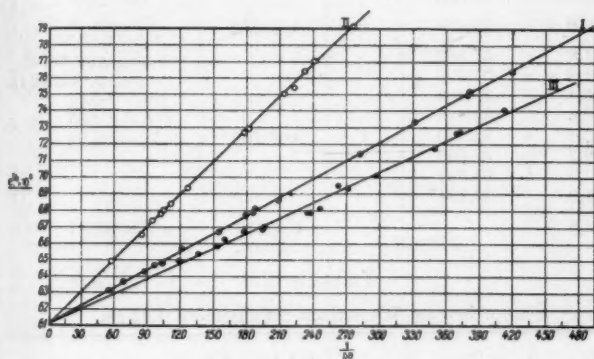


Fig. 1.

alle Daten im Wasserstoff zusammengefaßt. Der Wert $e^{1/2}$ vom Tröpfchen in Tab. 1 ist 1 Proz. zu hoch; denn l/a ist ein wenig über der Grenze, in der ich das lineare Verhältnis zwischen $e^{1/2}$ und l/a nicht mehr gültig fand.²⁾ Es ist aber nicht die geringste Andeutung dafür vorhanden, daß der Wert e abnimmt, wenn a kleiner wird. Der Reibungskoeffizient von Wasserstoff, nämlich $\eta_{23} = 0,0000884$, stimmt innerhalb eines Fünftel Prozents mit dem Wert überein, der durch die Multiplikation des absoluten Wertes³⁾ von η für Luft für 23° C, nämlich 0,0001824, mit dem Wert des Quotienten

1) Phys. Rev. (2) p. 117. 1913.

2) Phys. Rev. (2) p. 138. 1913.

3) Ann. d. Phys. 41. p. 759. 1913.

zwischen den Reibungen von Wasserstoff und Luft, nach den neuesten Bestimmungen durch Markowsky¹⁾ und Gille²⁾ gegeben wird.

Tabelle 1.

Öltröpfchen im Wasserstoff. Fallstrecke 1,03 cm.

t_g Sek.	t_F Sek.	n	$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_F} \right)$	
	10,626	3	0,03209	$V_i = 809,5$ Volt $V_f = 808,0$ „ $t = 23,0^\circ \text{C}$ $p = 74,78$ cm $v_1 = 0,03249$ $\eta_{23} = 0,00008841$ $a = 0,0000252$ cm $1/pa = 530,6$ $l/a = 0,695$ $e_1^{1/2} = 96,92$
	32,678			
	32,848			
	33,060			
460,0	15,830	2	0,03262	
441,8	32,892			
471,8	33,192			
455,4	33,802			
452,8	33,046			
442,4	32,740	1	0,03166	
436,2	33,996			
445,0	33,104			
434,0	33,194			
448,8			0,03170	$e^{1/2} = 61,9 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 2.

Öltröpfchen im Wasserstoff. Fallstrecke 1,02 cm.

t_g Sek.	t_F Sek.	n	$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_F} \right)$	
101,0	30,5	1		$V_i = 3252,8$ Volt $V_f = 3244,5$ „ $t = 23,0^\circ \text{C}$ $p = 75,25$ cm $v_1 = 0,04303$ $\eta_{23} = 0,00008841$ $a = 0,0000596$ cm $1/pa = 223,1$ $l/a = 0,292$ $e_1^{1/2} = 75,40 \cdot 10^{-8}$
101,9	30,6			
102,9	30,6			
103,4	13,6	2	0,04218	
103,0	13,2			
103,1	30,5	1	0,04219	
103,1	30,8			
101,9	30,8			
102,7	30,1			
102,6	30,8			
102,6			0,04219	$e^{1/2} = 60,9 \cdot 10^{-8}$

1) H. Markowsky, Ann. d. Phys. 14. p. 749. 1904.

2) A. Gille, Ann. d. Phys. 48. p. 825. 1915.

Tabelle 3.

Öltröpfchen im Wasserstoff. Fallstrecke 1,02 cm.

t_g Sek.	t_F Sek.	n'	$\frac{1}{n'} \left(\frac{1}{t_F} - \frac{1}{t_F'} \right)$	n	$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_F} \right)$	
18,638	42,122	1	0,01283	6	0,01292	$V_i = 2456,2$ Volt $V_j = 2452,6$ „ $t = 22,88^\circ$ C $p = 39,40$ cm $v_1 = 0,01313$ $\eta_{23} = 0,00008841$ $\alpha = 0,000143$ cm $1/pa = 178,1$ $l/a = 0,233$ $e_1^{1/2} = 72,71 \cdot 10^{-8}$
18,720	42,466					
18,616	41,916					
18,505	41,519					
18,656	42,070					
18,579	41,780					
18,596	41,922	1	0,01275	5	0,01289	
18,588	91,712					
18,588	93,012					
18,569	93,228					
18,692	95,416					
18,648	94,628					
18,497	42,828	1	0,01310	5	0,01276	
18,459	43,016					
18,376	43,141					
18,586	43,190					
18,514	43,200					
18,456	42,926					
18,426	98,590	1	0,01289	5	0,01276	
18,472	99,264					
18,560			0,01289		0,01287	$e^{1/2} = 61,11 \cdot 10^{-8}$

Die Punkte an diesen zwei Kurven stellen aufeinanderfolgende Beobachtungen dar; kein einziges Tröpfchen, weder in Luft noch im Wasserstoff, wurde ausgelassen. Dies zeigt die gänzliche Gleichförmigkeit und Übereinstimmung, die wir in den Arbeiten mit Öltröpfchen erlangt haben. Daß Quecksilbertröpfchen ein gleichförmiges Verhalten zeigen, wurde — wenn auch etwas unvollkommen — schon in den Originalbeobachtungen bemerkt, die ich über Quecksilbertröpfchen veröffentlichte.¹⁾ Seitdem habe ich alle damals gezogenen Schlüsse vollständig bestätigt. Daß Quecksilbertröpfchen, wenn entsprechende Maßregeln getroffen werden, sich auch beinahe so gleichförmig wie Öltröpfchen verhalten, wird in Fig. 1 III gezeigt, welche die Daten über die Arbeit mit Queck-

1) R. A. Millikan, Phys. Rev. p. 389—390. 1911.

Tabelle 4.

Öltröpfchen im Wasserstoff. Fallstrecke 1,02 cm.

t_g Sek.	t_F Sek.	n'	$\frac{1}{n'} \left(\frac{1}{t_F} - \frac{1}{t_g} \right)$	n	$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_F} \right)$	
7,726	65,146					
7,742	64,102					
7,632	63,240					
7,742	62,624			13	0,01112	
7,728	61,782					
7,760	61,308					
7,750	61,394					
7,808	36,176	1	0,01132			
7,742	35,822			14	0,01118	
7,838	35,754					$V_t = 3928,0$ Volt
7,778	59,340	1	0,01109			$V_f = 3920,6$ "
7,750	59,320			13	0,01119	$t = 23,02^\circ \text{C}$
7,734	19,926	3	0,01114			$p = 74,27$ cm
7,828	19,566					$v_1 = 0,011434$
7,716	19,732			16	0,01121	$\eta_{23} = 0,00008841$
7,734	19,600					$a = 0,000233$ cm
7,774	57,900	3	0,01113			
7,810	57,296			13	0,01123	$1/pa = 57,7$
7,856	57,354					$l/a = 0,0756$
7,848	34,880	1	0,01128			$e_1^{1/2} = 64,89 \cdot 10^{-4}$
7,816	34,708			14	0,01124	
7,846	11,784	5	0,01119			
7,738	11,836			19	0,01122	
7,732	11,774					
7,780	57,120	6	0,01119			
7,814	56,632			13	0,01124	
7,754	57,340					
7,794	57,186					
7,769			0,01119		0,01121	$e^2 = 61,10 \cdot 10^{-4}$

silbertröpfchen enthält. Eine Wolke von Quecksilbertröpfchen, durch das Kondensieren des Dampfes vom siedenden Quecksilber geformt, wurde durch ein kleines Loch in der oberen Kondensatorplatte in die Beobachtungskammer geblasen. Diese Daten sind jetzt kürzlich im Ryerson-Laboratorium von Hrn. John B. Derieux gewonnen. Da hier der Druck immer der der Atmosphäre war, so gehen die Tröpfchen ihrer Größe

Tabelle 5.

Nr.	$t^{\circ}\text{C.}$	p cm Hg	$P D$ Volt	t_{θ} Sek.	n	$a \cdot 10^5$ cm	$\frac{1}{p a}$	$e_1^{1/2} \cdot 10^8$	$e^{1/2} \cdot 10^8$
1	23,0	74,78	808,5	44,88	1—3	2,52	530,5	96,92	61,90
2	23,0	19,05	1044,2	17,05	7—11	13,64	385,0	86,46	61,22
3	23,0	30,99	1638,8	34,78	3—4	9,74	331,4	83,05	61,00
4	23,0	40,64	2445,0	53,23	1—2	7,94	309,8	81,65	60,92
5	23,0	30,74	1639,5	25,03	5—12	11,76	276,6	79,14	61,24
6	23,0	30,46	1640,3	19,20	7—8	13,65	240,5	77,04	61,06
7	23,0	40,57	2460,5	32,56	2—3	10,59	232,6	76,39	61,01
8	23,0	75,40	3248,5	10,26	1—2	5,96	223,1	75,40	60,90
9	23,0	40,41	2448,8	27,47	3—8	11,55	214,2	75,02	60,90
10	23,0	40,19	2451,0	20,16	5—8	13,67	182,0	72,88	61,27
11	22,9	39,40	2454,4	18,61	5—6	14,25	178,1	72,71	61,12
12	23,0	73,59	3280,0	33,56	2—3	10,78	126,0	69,31	61,26
13	23,0	74,78	3266,5	27,58	2—5	12,07	110,7	68,36	61,08
14	23,0	74,46	3915,5	24,55	2—5	12,84	104,6	67,94	61,06
15	22,9	74,40	3288,0	23,63	3—6	13,12	102,4	67,74	61,00
16	23,0	73,31	3287,8	19,76	4—7	14,37	94,9	67,36	61,02
17	23,0	75,88	3278,1	17,54	5—8	15,34	85,8	66,56	60,88
18	23,0	74,27	3924,3	7,78	12—19	23,34	57,7	64,89	61,11

Mittelwert = 61,11

nach von rechts nach links; das größte hat einen Durchmesser ungefähr dreimal dem des kleinsten, dessen Halbmesser nach Tab. 6 00008244 cm war. Man bemerkt, daß es uns hier gelungen ist, die Verdampfung der Quecksilbertropfchen, die in früheren Arbeiten so hinderlich war, zum größten Teil zu vermeiden.

Tabelle 6. Quecksilbertröpfchen in Luft. Fallstrecke 1 cm.

t_g Sek.	t_F Sek.	n'	$\frac{1}{n'} \left(\frac{1}{t_F} - \frac{1}{t_g} \right)$	n	$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_F} \right)$	
48,09	50,80	1	0,0409	1	0,0405	$V_s = 3800$ Volt
47,48	50,40					$V_f = 3745$ "
47,97	50,90					$t = 22,90^\circ$ C
47,89	50,10					$p = 74,84$
47,71						$v_1 = 0,02082$
48,48	16,50	2	0,0407	2	0,0407	$\eta = 0,0001824$
48,64	16,52					$a = 0,00003244$
						$1/pa = 411,8$
						$l/a = 0,2928$
						$e_1^{2/3} = 74,05 \cdot 10^{-4}$
47,92			0,0409		0,0406	$e^{2/3} = 61,3 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 7. Quecksilbertröpfchen in Luft. Fallstrecke 1 cm.

t_g Sek.	t_F Sek.	n'	$\frac{1}{n'} \left(\frac{1}{t_F} - \frac{1}{t_g} \right)$	n	$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_F} \right)$	
39,89	8,13	1	0,0372	4	0,0376	
39,91	8,63					
39,82	7,90					
39,79	7,91					
	11,28					
	11,30	1	0,0380	3	0,0377	
	11,54					
	11,51					
	11,22					
	20,16					
	20,12	1	0,0372	2	0,0373	$V_t = 3935$ Volt
	19,95					$V_f = 3875$ "
	20,05					$t = 23,05$ "
	19,95					$p = 75,98$
	78,40					$v_1 = 0,02464$
	79,20	1	0,0380	1	0,0373	$\eta = 0,0001824$
	78,00					$a = 0,0000362$
	19,81					$1/pa = 369,4$
	19,61					$l/a = 0,2666$
	19,79					$e_1^{2/3} = 72,63 \cdot 10^{-4}$
	19,75	1	0,0382	2	0,0374	
	19,69					
41,41						
41,21	11,19					
41,38	11,30					
41,20	11,31	3	0,0377	3	0,0377	
14,21	11,25					
14,46	11,26					
40,58			0,0377		0,0375	$e^{2/3} = 61,3 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 8. Quecksilbertröpfchen in Luft. Fallstrecke 1 cm.

t_g Sek.	t_F Sek.	n'	$\frac{1}{n'} \left(\frac{1}{t_F} - \frac{1}{t_F} \right)$	n	$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_F} \right)$	
9,92	6,00					
9,83	5,90					
9,85	5,80			14	0,0194	
	5,94	4	0,0197			
	11,02					
9,76	10,92					
	10,97			10	0,0193	
	11,01					
	10,98					
	11,04					
9,76	10,94					
	11,01					
	11,15	1	0,0195			$V_i = 4685$ Volt
	14,05					$V_j = 4615$..
	13,96			9	0,0193	$t = 23^\circ \text{C}$
9,66	14,06	4	0,0194			$p = 74,61$ cm
	6,68					$v_1 = 0,1024 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
	6,67			13	0,0193	$\eta = 0,0001824$
9,67	6,79					$a = 0,00007575$
	6,75	4	0,0193			$1/pa = 177,4$
	14,07					$l/a = 0,1253$
	13,93			9	0,0193	$e_1^{2/3} = 66,75 \cdot 10^{-8}$
9,72	13,92					
	13,98	1	0,0199			
	19,26					
	19,29			8	0,0193	
9,55	19,39					
	19,52	2	0,0194			
	76,80					
	77,40			6	0,0192	
	77,30					
	77,80	1	0,6188			
	31,54					
	31,36			7	0,0191	
9,82	31,47					
	31,84	1	0,0192			
	19,70			8	0,0192	
	19,60					
9,72	19,51					
	19,67	2	0,0192			
	8,00					
	8,00			6	0,0192	
	7,92					
9,79	7,90	1	0,0187			
9,97	3,17			7	0,0191	
9,79	3,23					
9,77			0,01932		0,01925	$e_1^{2/3} = 61,1 \cdot 10^{-8}$

Es wird nicht behauptet, daß diese Arbeit eine Bestimmung ist, die in Genauigkeit mit der in Öltröpfchenarbeiten erreichten und schon veröffentlichten Genauigkeit zu vergleichen ist. Es zeigt jedoch, daß die Linie durch den Punkt $e^{1/2} = 61,1 \cdot 10^{-8}$ sehr nahe an allen beobachteten Punkten liegt, und daß daher meine Originalbestimmung von $e = 4,774 \cdot 10^{-10}$ keinen großen Fehler haben kann.

Diese Resultate zeigen entschieden die Gültigkeit der Behauptung, daß der scheinbare Wert des Elektrons im allgemeinen keine Funktion des Halbmessers des Tröpfchens ist, von dem es gefangen wurde.

Scheint es so bei Ehrenhafts Tröpfchen zu sein, so kann der Grund unmöglich in wirklichen Schwankungen in dem Werte der elementaren Ladung gefunden werden, ohne die Gültigkeit meiner Resultate gänzlich zu verneinen. Aber diese Resultate sind in ihren wesentlichen Bestandteilen von vielen Beobachtern, Ehrenhaft mit eingeschlossen, nachgeprüft worden. Ferner sind meine Resultate nicht die einzigen, mit denen Ehrenhafts Behauptungen im Widerspruch stehen; sie stehen auch im Widerspruch mit all den Experimentalarbeiten, wie die von Rutherford und Geiger u. Regener über die Messungen der Ladungen, die von α - und β -Partikeln getragen werden. Denn diese sind doch unendlich viel kleiner als irgendein von Ehrenhaft gebrauchter Partikel. Und wenn, wie er behauptet, der Wert der Einheit, aus der die Ladung gebildet wird, kleiner und kleiner wird, je kleiner die Kapazität des Körpers wird, an dem es sich befindet, dann sollten diese α -Partikelladungen außerordentlich klein sein im Verhältnis mit den Ladungen an unseren Öltröpfchen. Anstatt diesem wird jedoch die Ladung an dem α -Partikel genau zweimal so groß gefunden wie die Ladung, die ich in meinen Öltröpfchenexperimenten gemessen habe.

Ogleich es weder dem richtigen Sinn noch dem Verfahren moderner Wissenschaft entspricht, eine dogmatische Behauptung über die Existenz oder Nichtexistenz eines Subelektrons zu machen, so kann doch mit voller Gewißheit behauptet werden, daß in Ehrenhafts Experimenten nicht ein einziges Beweisstück für die Existenz einer Ladung ist, die kleiner sei als das Elektron. Wenn all seine Annahmen über die Natur seiner Partikel richtig sind, so sagen seine

Exp
Bew
daß
ande
unw
seine
lun
stei
tikel
ande
2,5
welc
Arb
kein
von

Pro
sein
Ele
der
hab
und
die
sie

zu c
also
nich

An
sph
dies
Res

usw.

Experimente nur einfach, daß die Einstein-Brownsche Bewegungsgleichung nicht von allgemeiner Gültigkeit sei, und daß das Fallgesetz für solch kleine geladenen Partikel ganz anders sei, als er angenommen hatte. Es ist jedoch sehr unwahrscheinlich, daß irgendeiner der beiden Schlüsse von seinen Experimenten gezogen werden kann; denn Nordlund¹⁾ und Westgren²⁾ haben, wie es scheint, die Einsteinsche Gleichung in Flüssigkeiten mit weit kleineren Partikeln, als Ehrenhaft sie nimmt, bestätigt, und auf der anderen Seite, obwohl ich mit Partikeln gearbeitet habe, die $2,5 \cdot 10^{-5}$ cm sind und einen Wert von l/a von 100 haben, welcher weit größer ist als irgendeiner aus Ehrenhafts Arbeiten und den Arbeiten seiner Schüler, so habe ich doch keinen Beweis gefunden, daß das Fallgesetz sich wesentlich von demjenigen ändert, das ich in 1913 veröffentlichte.

§ 10. Zusammenfassung.

Die Folgerungen sind also:

1. Ehrenhaft hat noch keine, auch nur ungefähre, Proben gemacht, ob die Einstein-Brownsche Bewegung für seine Partikel nicht auch denselben Wert Ne gibt wie die Elektrolyse. Ich habe es auch für Quecksilberpartikel von der Größe $a = 2,5 \cdot 10^{-5}$ geprüft, und Fletcher und Eyring haben es sehr genau für Öltröpfchen dieser Größe gemessen und finden Übereinstimmung. Es ist wahrscheinlich, daß die Gleichung auch für Ehrenhafts Partikel gültig ist, wenn sie genau geprüft wird.

2. Dieses Versagen der Gleichung hat keinerlei Beziehung zu der Frage nach der Existenz eines Subelektrons. Es würde also nur bedeuten, daß die Einsteinsche Gleichung in Gasen nicht auf alle Partikel jeder Größe anwendbar sei.

3. Alle Resultate Ehrenhafts können leicht durch die Annahme, daß er falsche Annahmen über die Dichte und sphärische Form seiner Partikel macht, erklärt werden. Wenn diese Annahmen richtig wären, so würden auch dann seine Resultate keine Beziehung zur Frage über die Existenz eines

1) J. Nordlund, Zeitschr. f. Phys. Chem. 87. p. 40. 1914.

2) A. Westgren, Untersuchungen über die Brownsche Bewegung usw. In.-Diss. Uppsala u. Stockholm. 1915.

Subelektrons haben. Sie sagen bloß, daß er ein falsches Fallgesetz für seine außergewöhnlich kleinen geladenen Partikel in einem Gase angenommen hat.

4. Das Nichtvorhandensein eines Subelektrons in Ehrenhafts Experimenten wird durch ein vielfaches Verhältnis zwischen Ladungen, die eine gewisse Partikel trägt, und auch durch meinen direkten Beweis in dieser Abhandlung, daß der scheinbare Wert von e im allgemeinen sogar bei Quecksilbertröpfchen, auf denen es sich befindet, keine Funktion des Halbmessers ist, erwiesen. Die entgegengesetzte, durch Ehrenhaft gemachte Erklärung führt nicht nur auf eine unmögliche Annahme über die Natur der Ionisation, sondern wird durch meine Experimente völlig widerlegt.

5. Bis zur gegenwärtigen Zeit ist — nach meiner Meinung — gar kein Beweis für die Existenz eines Subelektrons geführt.

Ryerson Physical Laboratory, University of Chicago.

(Eingegangen 8. Juni 1916.)

2. Über die elektrische Absorption in Entladungsröhren; von L. Vegard.

(Aus den Berichten der wissenschaftlichen Gesellschaft in Kristiania.)

§ 1. Die elektrische Absorption von Gasen in Entladungsröhren ist eine wohlbekannte Erscheinung. Diese Vorgänge sind schon mehrmals untersucht worden, aber teilweise auf Grund ihrer komplizierten Natur haben die Untersuchungen Ergebnisse geliefert, die zum Teil einander widersprechen, oder sie gestatten wenigstens keine einfache Deutung des Vorganges.

Unter den Absorptionserscheinungen in Entladungsröhren, die unter Umständen ganz verschiedenen Ursachen zuzuschreiben sind, gibt es eine sehr charakteristische Erscheinung, die ich konservative Absorption genannt habe, und die als elektrische Absorption im eigentlichen Sinne aufzufassen ist. Meiner Meinung nach ist diese konservative Absorption als ein Phänomen fundamentaler Art anzusehen und bildet einen eigenartigen Modus für stoffliche Vereinigung.

Einige der ersten systematischen Versuche über elektrische Absorption verdanken wir R. S. Willows.¹⁾ Er findet, daß die Absorption bei derselben Stromstärke mit abnehmendem Drucke wächst, und er kam zu dem Resultat, daß die Absorption als eine chemische Verbindung zwischen Gas und Röhrenwand zu erklären sei.

E. Riecke²⁾ fand eine ähnliche Variation mit dem Druck; er erklärte sich aber den Vorgang anders als Willows, und zwar in folgender Weise: Er dachte sich, daß der Stromdurchgang durch zwei Arten von Ionen hervorgebracht werde. Die eine Art waren Gasionen, die keine Absorption geben konnten; die andere Art aber sollte durch Elektroden absorbiert werden.

1) Phil. Mag. [6]. p. 503. 1903.

2) E. Riecke, Ann. d. Phys. 15. p. 1003. 1904.

Bei der Entladung war das Mengenverhältnis der beiden Ionenarten eine Funktion des Druckes, und zwar in der Weise, daß bei niedrigerem Drucke ein verhältnismäßig größerer Teil des Stromes durch absorbierbare Ionen getragen wurde.

C. A. Skinner¹⁾ hat die Abgabe der Gase von den Elektroden untersucht. In Röhren mit Helium und Argon findet er, daß Wasserstoff in dem Maße, wie es dem Faradayschen Gesetz entspricht, von den Elektroden abgegeben wird. Enthält das Rohr einen reinen Wasserstoff, so fand er keine Druckveränderung beim Stromdurchgang. Diese Tatsache erklärt er durch die Annahme, daß die Anode den Wasserstoff nach dem Faradayschen Gesetz wieder absorbiert.

Später hat V. L. Chrisler²⁾ diese von Skinner angenommene Absorption weiter untersucht. Er findet, daß unter gewissen Umständen die von ihm untersuchten Gase nach dem Faradayschen Gesetz absorbiert werden, und er behauptet, ohne jedoch einen Beweis hierfür beizubringen, daß die Absorption bei der Anode stattfindet.

In einer früheren Arbeit³⁾ habe ich gezeigt, daß nicht der Druck, sondern der Kathodenfall für die elektrische Absorption maßgebend ist. Die Absorption für jede Coulomb war bei jedem Drucke sehr gering, solange der Kathodenfall unter einer gewissen Grenze — Schwellenwert — lag. Wurde in irgendeiner Weise der Kathodenfall erhöht, z. B. durch Vergrößerung der Stromstärke, so wurde die Absorption sofort größer und näherte sich bei steigendem Kathodenfall einer Grenze von der Größenordnung des elektro-chemischen Äquivalents.

Auf Grund dieser Tatsachen wurde angenommen, daß die Absorption in der Weise zustande komme, daß die positiven Ionen in der Kathodenschicht (Kanalstrahlen vor der Kathode) bei genügend großer Geschwindigkeit die Fähigkeit bekämen, sich mit dem Kathodenmetall in irgendeiner Weise zu verbinden.

Es wurde weiter erwähnt, daß eine Reihe von Versuchen von Willows, für die er jedoch keine Erklärung gegeben

1) C. A. Skinner, Phys. Rev. 21. p. 7. 1905. Physik. Zeitschr. [6]. p. 610. 1905. Phil. Mag. [6]. 12. p. 481. Phys. Rev. p. 169. 1905.

2) V. L. Chrisler, Physik. Zeitschr. 10. p. 745. 1909.

3) L. Vegard, Phil. Mag. (6) 18. p. 465. 1909.

hatte, durch die gefundenen Beziehungen zwischen Kathodenfall und Absorption sich sehr einfach erklären lassen.

Diese Ergebnisse machten weitere Untersuchungen wünschenswert.

Wenn die gegebene Erklärung richtig wäre, sollte die Absorption hauptsächlich bei der Kathode stattfinden.

Für die Prüfung der aufgestellten Hypothese war es deshalb von besonderem Interesse, die Rolle der beiden Elektroden bei dem Absorptionsvorgang zu untersuchen. Ferner war es auch wünschenswert, die Absorption für möglichst viele Gase und Elektroden unter vergleichbaren Umständen zu kennen.

Die folgende Mitteilung enthält die Ergebnisse von Untersuchungen, die ich über diese Punkte angestellt habe, und von denen einige schon im Jahre 1909 in dem Cavendish-Laboratorium, Cambridge, ausgeführt worden sind. Die Versuche mit Wasserstoff, Sauerstoff und Helium waren hauptsächlich dort ausgeführt.

Da es einige Zeit dauerte, bis ich nach meiner Rückkehr nach Kristiania die Untersuchungen fortsetzen konnte, habe ich von den in Cambridge angestellten Versuchen eine Mitteilung an „Kristiania Videnskapsselskap“ eingereicht.

Es wurde in dieser vorläufigen Mitteilung darauf aufmerksam gemacht, daß man zwei Arten von Absorption unterscheiden muß, die konservative und die nicht-konservative Absorption. Es wurde gezeigt, daß die konservative Absorption bei der Kathode stattfindet, und ferner wurde erwähnt, daß die konservative Absorption mit der Zerstäubung der Elektroden eng verbunden ist, eine Tatsache, die mit der von mir aufgestellten Hypothese über die Ursache der Absorption in gutem Einklang steht.

In dem physikalischen Institut in Kristiania ist die Arbeit dann fortgesetzt worden. Es wurden Versuche über Absorption in Stickstoff, über Kathodenzerstäubung in Sauerstoff, sowie über die mögliche Einwirkung eines starken Magnetfeldes auf Absorption und Zerstäubung angestellt, und schließlich sind noch Versuche über die Absorption in geheizten Elektroden angefangen worden; aber diese sind noch nicht abgeschlossen.

Da die vorläufige Mitteilung noch nicht im Drucke er-

schießen ist, und da die in Cambridge und Kristiania angestellten Versuche eine zusammenhängende Untersuchung bilden, werden sie hier im Zusammenhang beschrieben.

Versuchsanordnung.

§ 2. Das Entladungsrohr war in der Weise hergestellt, daß eine Reihe von Elektroden aus verschiedenen Metallen, aber von derselben Form und Größe und in genau derselben relativen Stellung angewendet werden konnten.

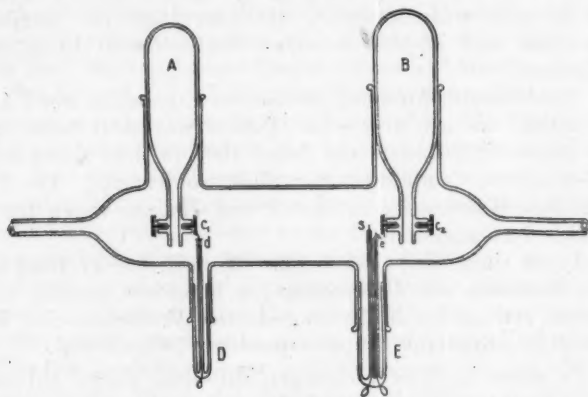


Fig. 1.

Zwei Kreuze c_1 und c_2 (Fig. 1) dienen als Träger der Elektroden. Die Kreuze bestanden aus Glaskapillaren, die an den beiden Röhren A, B befestigt waren. Die Röhren A, B waren in Schliffen drehbar, wodurch die Elektroden beliebig vertauscht werden konnten, ohne daß die sonstigen Entladungsbedingungen geändert wurden.

Die Elektroden bestanden aus rechtwinkligen Metallplatten (13×10 mm Oberfläche und 0,2 mm Dicke) und waren durch Nägel, die aus dem betreffenden Elektrodenmetall bestanden, an den zwei Kreuzen befestigt.

Als Stromzufuhr zu den Elektroden dienten zwei Platindrähte d und e , die durch zwei eingeschliffene Ansatzröhren D und E eingeführt waren. Die Platindrähte waren von sehr engen Glasröhren umgeben, und nur eine Spitze von etwa 2 mm Länge war frei, um den Kontakt herzustellen. Hier-

durch wurde erreicht, daß bei Entladung nur ein äußerst kleiner Bruchteil des ganzen Stromes von den Zuleitungsdrähten ausging.

Um konstante und vergleichbare Verhältnisse zu haben, war es notwendig, daß die effektive Elektrodenoberfläche konstant blieb. Nach einigem Stromdurchgang bildete sich auf dem Kreuz ein Metallbelag, der eine Vergrößerung der Kathodenoberfläche hervorbrachte. Um dies zu vermeiden, wurden die Rückseiten der Elektroden mit Glimmerblättern bedeckt. Zu demselben Zweck waren kleine Glimmerscheiben auf den Platindrähten (d) und (e) angebracht.

Der Kathodenfall wurde mittels der Sonde *S* gemessen, die in einem Abstand von 6 mm vor der Kathode angebracht war und zentral durch das Rohr *E* ging.

Als Stromquelle diente bei meinen Versuchen in Cambridge eine Hochspannungsbatterie von 1300 Volt Spannung, für die Versuche in Kristiania teils eine Hochspannungsbatterie von 960 Volt, teils eine zwanzigplattige Influenzmaschine von 0,3 Milliamp. maximaler Stromstärke.

Die größte Sorgfalt wurde auf die Reinigung des Rohres und der Elektroden verwendet. Das Rohr wurde mit einer Lösung von bichromsaurem Kali in konzentrierter Schwefelsäure behandelt und mit destilliertem Wasser ausgespült.

Bei den ersten Versuchen wurden die Metalle aus Gold und Platin vor dem Einsetzen in konzentrierter Salpetersäure und darauf in destilliertem Wasser gekocht. Die Elektroden aus unedlem Metall wurden erst in Alkohol, dann in destilliertem Wasser gekocht.

Bei den Versuchen in Kristiania wurden außerdem noch die Elektroden unmittelbar vor dem Einsetzen in dem elektrischen Ofen bis zur hellen Rotglut (900—1200°) etwa eine halbe Stunde erhitzt, um Spuren von Gasen und möglichen flüchtigen Bestandteilen zu beseitigen.

Für die Evakuierung des Rohres wurde teils eine Toeplerpumpe, teils eine Kaufmannpumpe benutzt. Die sonstige Vorrichtung für die Einführung der Gase in das Rohr und das Gasreservoir war ganz ähnlich derjenigen, die ich schon bei der früheren Arbeit benutzt habe.¹⁾

1) L. Vegard, l. c. p. 466.

Allgemeines über Absorptionsbestimmungen.

§ 3. Im allgemeinen ohne besondere Vorsichtsmaßregeln ist die gemessene Gesamtänderung des Druckes von einer Reihe von verschiedenen Vorgängen und Umständen beeinflusst. Wir wollen aber vorläufig annehmen, daß die gesamte Druckabnahme von der elektrischen Absorption herrühre. Wir können dann aus den meßbaren Größen die Absorptionsgeschwindigkeit V durch den folgenden Ausdruck berechnen:

$$(1) \quad v = \frac{Q}{760} \frac{\Delta p}{\Delta t} = a \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Q , das Volumen des Entladungssystemes, wurde mittels der üblichen volumenometrischen Methode bestimmt. Δp bedeutet die während der Zeit Δt beobachtete Druckabnahme in Millimeter Hg. Nach dieser Formel kann die Geschwindigkeit jeden Augenblick bestimmt werden, auch wenn sie mit der Zeit variiert.

Für die pro Coulomb absorbierte Gasmenge q bekommt man

$$(2) \quad q = \frac{v}{i},$$

wo i die Stromstärke in Amp. bedeutet.

Wir denken uns weiter einen Wasserstoffvoltameter in Serie mit dem Rohr und werden die Absorption durch das Verhältnis η zwischen dem absorbierten Volumen und dem Volumen des entwickelten Wasserstoffes ausdrücken, dann erhält man

$$(3) \quad \eta = 8,62 q.$$

Durch die Absorption wird der Druck im Rohr sich ändern, wodurch die Entladungsbedingungen während eines Absorptionsversuches kontinuierlich variieren.

Bei Verwendung der Influenzmaschine als Stromquelle wurde diese auf konstante Stromstärke reguliert. Mit der Hochspannungsbatterie wurden dagegen die angelegte Spannung und der Vorschaltwiderstand während eines Versuches konstant gehalten.

Wirkung der Gasentwicklung.

§ 4. Die gemessene Absorption ist von der Vorgeschichte des Rohres abhängig, und die gerade nach dem Auspumpen gemessene Absorption kann je nach dem Zustande des Rohres

sehr verschiedene Werte annehmen. Zuweilen kann man am Anfang eine sehr große Absorption haben — die Absorptionsgeschwindigkeit nimmt aber mit der Zeit gewöhnlich schnell ab, und wenn die Absorption bei relativ hohen Kathodenfällen stattfindet, ist im allgemeinen die Geschwindigkeit am Anfang des Betriebes relativ zu gering.

Die am Anfang beobachtete Absorption ist ein komplizierter Vorgang, der wohl je nach den Umständen den verschiedensten Ursachen zuzuschreiben ist; es zeigt sich aber, daß bei andauerndem Betrieb des Rohres die Absorptionsverhältnisse immer konstanter werden, bis ein Zustand erreicht ist, *bei dem die Absorption bei Wiederholung desselben Versuches sich nicht mehr ändert*. Diese dauernde Absorption — die ich konservative Absorption genannt habe — ist eine ganz gut definierte Erscheinung und kann für ein gegebenes Rohr annähernd als eine Funktion von Druck und Stromstärke angesehen werden.

Die Änderung der Absorption mit dem Zustand des Rohres geht aus Fig. 2 hervor. Links sind die Versuche im Anfangszustand, rechts diejenigen im Endzustand graphisch dargestellt. Die Versuche sind mit der Hochspannungsbatterie ausgeführt. Die Kurven p und i bezeichnen die zeitlichen Änderungen von Druck und Stromstärke, q und K die Absorption pro Coulomb bzw. die Kathodenspannung. Wir sehen, daß im Endzustand die Absorptionsgeschwindigkeit viel größer ist als im Anfangszustand. Die Herabsetzung der Geschwindigkeit im Anfangszustand ist wohl primär durch die Gasabgabe von dem Rohr und die Elektroden bedingt. Daß die scheinbare Absorption durch Gasabgaben herabgesetzt wird, ist selbstverständlich, und wäre die Geschwindigkeit der Gasabgabe bekannt, so sollte man aus der gemessenen gesamten Druckabnahme die wahre Absorptionsgeschwindigkeit berechnen können.

Aber auch die so berechnete wahre Absorptionsgeschwindigkeit würde ebenfalls von dem Zustande des Rohres abhängen und im Anfangszustand kleiner als im Endzustand sein. Die Absorption und die Gasabgabe können nämlich nicht als voneinander unabhängige Vorgänge betrachtet werden; sondern die abgegebenen Röhrengase üben auf den Absorptionsvorgang eine spezifische Wirkung aus, und selbst voraus-

gesetzt, daß die Geschwindigkeit der Gasabgabe derjenigen der Absorption gegenüber verschwindend gering ist — wie es im Endzustand des Rohres tatsächlich der Fall war —, so wird doch das Vorhandensein kleiner Spuren von Röhren- gasen die Absorption beträchtlich herunderdrücken.

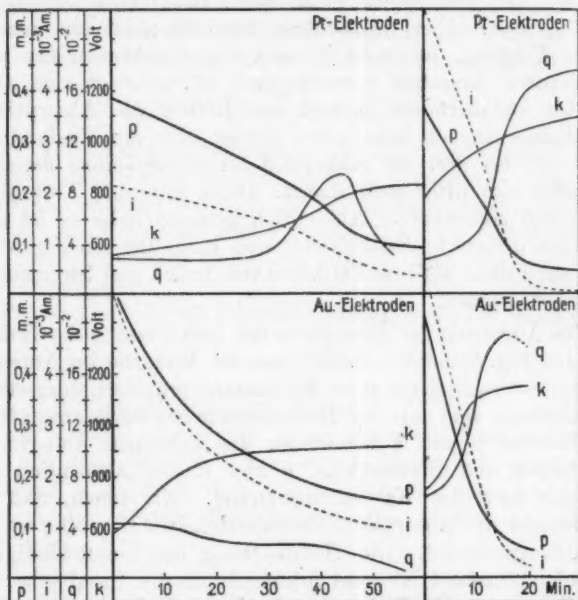


Fig. 2.

Die spezifische Wirkung der Röhrengase macht sich oft als eine Ermüdungserscheinung bemerkbar. Wenn das Rohr mit derselben Gasfüllung längere Zeit benutzt worden ist, werden wir zuletzt eine abnorm kleine Absorptionsgeschwindigkeit bekommen; bei reiner Gasfüllung jedoch werden dieselben Entladungsbedingungen rasch wieder hergestellt, so daß man sofort den normalen Wert erhält.

Eine wirkliche Ermüdung der Absorptionsfähigkeit dagegen ist nicht vorhanden. Wird derselbe Absorptionsversuch wiederholt, indem die Restgase vor jedem Versuch entfernt werden, so ist keine Abnahme der Absorptionsgeschwindigkeit

mit der Dauer des Betriebes zu beobachten. Auch wenn eine große Anzahl von Versuchen schnell nacheinander ausgeführt wird, hat die Absorption weder im Sauerstoff noch im Stickstoff eine Abnahme gezeigt. Es kann beispielsweise erwähnt werden, daß für Stickstoff eine Reihe von 14 Versuchen schnell nacheinander ausgeführt wurde. Bei jedem Versuch dauerte die Entladung 10 Minuten. Die Versuche ergaben für η die folgenden Werte: 1,07; 1,35; 1,27; 1,26; 1,49; 1,44; 1,42; 1,33; 1,33; 1,16; 1,34; 1,31; 1,41; 1,58.

Die spezifische Wirkung der Röhrengase geht aus dem folgenden Versuch hervor. Nachdem das Rohr zum Endzustand gebracht war, wurde mit Sauerstoff ein Absorptionsversuch gemacht, und der Strom wurde ausgeschaltet, sobald der Druck den Wert 0,055 mm erreicht hatte. Reiner Sauerstoff wurde hineingelassen bis zu einem Druck von 0,45 mm, ohne daß die Gasreste vorher ausgepumpt worden waren. Die Entladung ergab eine durchschnittliche Absorption von $q = 1,55 \cdot 10^{-2}$. Dann wurden die Gasreste ausgepumpt und der Absorptionsversuch unter genau denselben Bedingungen wiederholt. Als Durchschnittswert für q ergab sich jetzt $3,3 \cdot 10^{-2}$, oder die Absorptionsgeschwindigkeit bei gleicher Stromstärke war im letzten Falle ungefähr doppelt so groß als vorher.

Sollen vergleichbare Versuche angestellt werden, so ist es deshalb notwendig, vor jedem Versuche die Restgase sorgfältig zu entfernen. Bei meinen Versuchen wurde der Gasrest ausgepumpt und es wurde ein paarmal mit reinem Gas nachgespült.

In Übereinstimmung mit meiner Auffassung der elektrischen Absorption läßt sich die Wirkung der Restgase dadurch erklären, daß diese Gase einen Teil des elektrischen Stromes tragen, ohne selbst absorbiert zu werden. Die Restgase bestehen wohl größtenteils aus Wasserstoff, und, wie wir später sehen werden, erfüllt Wasserstoff gerade die verlangte Bedingung, keine merkliche konservative Absorption zu geben. Eine andere Möglichkeit ist auch, daß die akkumulierten Gasreste die von Gas und Metall gebildeten lockeren Verbindungen unbeständig machen.

Absorption in Sauerstoff.

§ 5. Für Sauerstoff wurde die Absorption mit Elektroden von Au und Pt untersucht. Als Stromquelle diente die Hochspannungsbatterie.

Die Hauptzüge der Variation von Absorption mit Stromstärke und Druck sind für jedes Elektrodenmetall durch zwei Kurven (Fig. 3) dargestellt. Die Kurven I und III geben die Relation zwischen Absorption und Druck für die Stromstärke 4,0 und 4,5 Milliamp. an, II und IV die Abhängigkeit der Absorption von der Stromstärke. Auf der Figur ist die Kathodenspannung K angegeben.

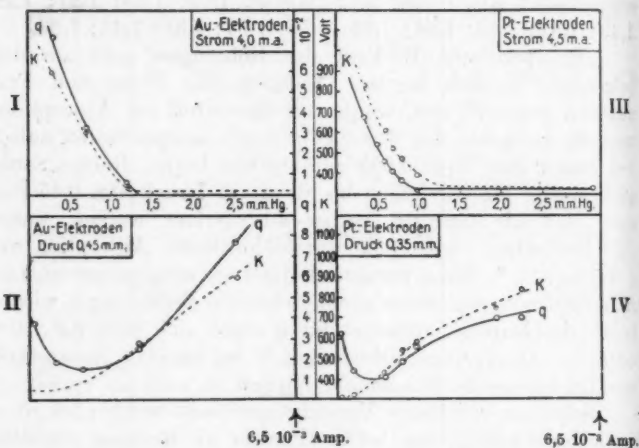


Fig. 3.

Aus I und III sehen wir, daß sowohl für Gold wie für Platin die Absorption q für das betrachtete Intervall genau der Variation des Kathodenfalles folgt. Für den Bereich des normalen Kathodenfalles ist q konstant und sehr klein; aber die Absorption geht mit steigender Kathodenspannung sofort in die Höhe. Für die beiden Kurven läßt sich die Abhängigkeit der Absorption vom Kathodenfall C durch die einfache Formel ausdrücken:

$$q = a(C - C'),$$

und man findet:

$$(4) \quad \begin{cases} \text{für Platin } q = 0,90 \cdot 10^{-4} \cdot (C - 400) \\ \text{,, Gold } q = 1,25 \cdot 10^{-4} \cdot (C - 320) \end{cases}$$

Diese einfache lineare Beziehung zwischen Absorption und Kathodenfall gilt jedoch nur für nicht allzu hohe Spannung;

denn bei steigender Kathodenspannung nähert sich die Absorption einem Grenzwert.

Die Gleichungen (4) lassen die fundamentale Rolle der Kathodenspannung für die elektrische Absorption ganz deutlich zum Vorschein kommen. Da aber bei konstanter Stromstärke der Kathodenfall als eine Funktion des Druckes angesehen werden kann, wäre es möglich, daß für die Absorption nicht die hohe Kathodenspannung, sondern der geringe Druck maßgebend ist. Daß aber diese Auffassung nicht richtig ist, geht aus den Kurven II und IV, Fig. 3, hervor, die eine Darstellung der Absorption für konstante Drucke angeben, und wir sehen, daß, solange eine Abnahme des Stromes von einer bedeutenden Abnahme des Kathodenfalles begleitet ist, q mit abnehmender Stromstärke abnehmen wird. Wenn aber der Kathodenfall normal wird, so wird eine weitere Abnahme des Stromes von einer Zunahme der Absorption begleitet sein. Bestände also nicht die Wirkung der Kathodenspannung, so sollte man eine Vergrößerung von q bei abnehmender Stromstärke erwarten.¹⁾

Der Einfluß des Kathodenfalles geht auch aus dem folgenden Versuch hervor. Zuerst wurde mit einem Strom von ungefähr 2 Milliamp. und einer Kathodenspannung von 700 Volt das Gas von dem Drucke 0,84—0,25 mm absorbiert, wobei sich für q der Wert $4,2 \cdot 10^{-2}$ ergab. Dann wurde die Stromstärke auf 0,3 Milliamp. und die Kathodenspannung auf 400 Volt vermindert, wodurch die Absorption q auf $0,45 \cdot 10^{-2}$ herabgesetzt wurde. Bei einem Strom und einer Spannung von der ursprünglichen Größe wurde wieder für q der Wert $4,2 \cdot 10^{-2}$ gefunden.

Man kann auch bei sowohl unverändertem Druck wie unveränderter Stromstärke die Kathodenspannung durch Änderung der Kathodenoberfläche variieren. Ein solcher Versuch läßt sich sehr einfach mit dem angegebenen Apparat ausführen, indem man den Kontakt zwischen dem Zuleitungsdraht e und der Elektrodenplatte C aufhebt und nur das Drahtende als Kathode benutzt. Bei passendem Druck und passender Stromstärke kann man erreichen, daß durch Aufheben des Kontaktes der Kathodenfall in die Höhe geht, und man bemerkt dann sofort eine entsprechende Zunahme der Absorption.

1) Man muß bedenken, daß q konstant sein wird, wenn die Geschwindigkeit der Absorption proportional der Stromstärke zunimmt.

Absorption in Stickstoff.

§ 6. Das Stickstoffgas wurde durch Erhitzen von Ammoniumnitrit gewonnen und im Vakuum entwickelt. Um das Gas von etwaigen Spuren von Sauerstoff zu befreien, wurde es über erhitzte Kupferdrähte geleitet und durch Phosphor-pentoxyd getrocknet. Als Stromquelle wurde eine Influenzmaschine benutzt und auf konstante Stromstärke reguliert.

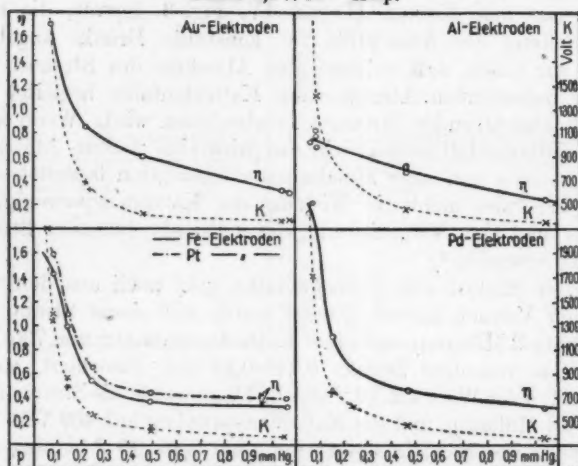
Strom $0,3 \times 10^{-3}$ Amp.

Fig. 4.

Die Absorption wurde für die fünf Metalle Pt, Au, Pd, Al und Fe untersucht, und die Resultate findet man in Fig. 4 angegeben. Die Absorption ist durch die Größe $\eta = 8,62 q$ ausgedrückt.

Wir sehen, daß Stickstoff sich ähnlich wie der Sauerstoff verhält. Die Änderung der Absorption geht derjenigen der Kathodenspannung parallel. Mit steigender Kathodenspannung geht die Absorption rasch in die Höhe.

Doch zeigt Stickstoff bei normaler Kathodenspannung eine größere Absorption als Sauerstoff; nur darf man nicht in diesem Verhalten einen fundamentalen Unterschied zwischen Sauerstoff- und Stickstoffabsorption erblicken. Von unserem

Gesichtspunkte aus bedeutet es nur, daß für Stickstoff unter den vorhandenen Bedingungen der Schwellenwert niedriger liegt als für Sauerstoff.

Einfluß der Elektroden.

§ 7. Im Endzustande des Rohres geben Goldelektroden in Sauerstoff eine beträchtlich größere Absorption als Platinelektroden. Diese Abhängigkeit der Absorption vom Elektrodenmaterial ist eine sehr wichtige Tatsache; denn einerseits geht daraus hervor, daß die Absorption irgendwie mit den Elektroden verbunden ist, andererseits kann man durch Austausch der Elektroden untersuchen, ob die Absorption bei der Anode oder der Kathode stattfindet.

Wie erwähnt, gestattet die Anordnung einen beliebigen Austausch von Elektrodenmetallen, ohne die sonstigen Versuchsbedingungen zu ändern. Es wurden sowohl in Stickstoff als in Sauerstoff Versuche angestellt, die sich nur durch verschiedene Kombinationen von Elektroden unterscheiden. Für Sauerstoff wurde das Gas von einem Drucke von $p_0 = 0,40$ mm bis zu $p_1 = 0,065$ mm absorbiert und der Durchschnittswert von q mittels des Ausdrucks

$$q_a = a \frac{p_0 - p_1}{\int_{t_0}^{t_1} i dt}$$

berechnet. Die Ergebnisse findet man in Tab. I.

Tabelle I.
Sauerstoff.

Kathode	Anode	q_a
Pt	Au	$4,7 \cdot 10^{-3}$
"	Pt	4,5 "
"	Draht ¹⁾	5,1 "
Pt	Mittel	4,8 —
Au	Draht	$8,8 \cdot 10^{-3}$
"	Pt	9,5 "
"	Au	9,1 "
Au	Mittel	9,1 "

1) „Draht“ bezeichnet das Platindrahtende (e), das zur Herstellung des Kontaktes benutzt wurde.

Für Stickstoff zeigte bei kleinem Druck Aluminium eine andere Absorption als die übrigen untersuchten Metalle, deren Absorptionsfähigkeit in Stickstoff ziemlich dieselbe war. Ähnlich wie für Sauerstoff wurden auch für Stickstoff vergleichbare Versuche angestellt, wobei die Metalle Al und Pt in verschiedenen Kombinationen als Elektroden benutzt wurden; die Ergebnisse sind in Tab. II aufgeführt.

Tabelle II.

Stickstoff.

Kathode	Anode	q_d
Pt	Pt	13,5 10^{-2}
Pt	Al	12,8 "
Al	Al	7,2 "

Aus den beiden Tabellen geht hervor, daß die Absorption von dem Anodenmaterial und von der Größe der Anodenoberfläche unabhängig ist, und daß die Änderung der Absorption mit Elektrodenmetall nur dann stattfindet, wenn das Kathodenmetall geändert wird. Die hier untersuchte elektrische Absorption ist also mit der Kathode verbunden.

Absorption in Helium.

§ 8. Das Helium wurde aus Thorianit durch Erhitzen mit konzentrierter Salpetersäure gewonnen. Das Gasgemisch wurde durch ein mit Holzkohle gefülltes und mit flüssiger Luft abgekühltes U-Rohr geleitet. Nach zweistündiger Abkühlung wurde das nicht absorbierte Helium in den Vorratsraum hineingelassen. Die Reinheit wurde spektroskopisch geprüft. Die elektrische Absorption in Helium ist kleiner als in Sauerstoff und Stickstoff. Für Kathodenfälle, die kleiner sind als etwa 800 Volt, ist die Absorption so gering, daß eine genaue Bestimmung praktisch unmöglich ist. Es ließ sich jedoch, wie aus Tab. III hervorgeht, eine ganz deutliche Zunahme mit wachsender Kathodenspannung beobachten; in keinem Falle aber war eine Absorptionsgeschwindigkeit festzustellen, die annähernd die Größe gehabt hätte, die für die Erfüllung des Faradayschen Gesetzes nötig wäre.

Tabelle III.

Elektroden	p	Stromstärke	Kathodenfall	q
Pt	1,24 mm	$1,5 \cdot 10^{-3}$ Amp.	700 Volt	$0,03 \cdot 10^{-3}$
"	0,41 "	0,19 "	900 "	0,28 "
"	0,62 "	0,90 "	1250 "	1,2 "
"	0,97 "	0,26 "	1150 "	2,0 "

Absorption in Wasserstoff.

§ 9. Unter sonst gleichen Umständen wurden für Wasserstoff ganz andere Absorptionsverhältnisse als für die früher erwähnten Gase gefunden. Als Beispiel sollen hier einige Versuche mitgeteilt werden.

Seitdem die Versuche mit Helium angestellt worden waren, wurde das Rohr evakuiert gehalten. In diesem Zustand des Rohres wurde etwas Wasserstoff eingelassen und mit der Entladung bei normaler Kathodenspannung und bei $1,2 \cdot 10^{-3}$ Amp. Stromstärke begonnen. Anfangs wurde eine Absorption von $q = 0,12$ beobachtet. Die Absorptionsgeschwindigkeit nahm aber schnell ab. Nach 5 Minuten war q bis auf 0,071, nach 30 Minuten bis auf 0,016 herabgesunken. Die Stromstärke wurde dann bis auf $0,4 \cdot 10^{-3}$ Amp. herabgesetzt, was eine Zunahme von q bis auf 0,055 zur Folge hatte. Von diesem Punkte ab wurde die Stromstärke wieder bis auf $2,0 \cdot 10^{-3}$ Amp. erhöht, und jetzt fing die Entladung mit Gasentwicklung an, die aber nur wenige Minuten dauerte, während sich der Druck 3 Stunden auf dem Wert 0,6 mm unverändert hielt.

Nach diesem Versuch wurde das Rohr evakuiert und mit neuem Gas bis 0,29 mm Druck gefüllt. Entladung mit einer Stromstärke von $2,5 \cdot 10^{-3}$ Amp. und Kathodenspannung von 740 Volt gab Gasentwicklung, die aber bald aufhörte, während der Druck sich mehrere Stunden auf 0,43 mm hielt. Der Druck wurde wieder bis auf 0,23 mm herabgesetzt und mit der Entladung ($i = 1,6 \cdot 10^{-3}$ Amp. $K = 720$ Volt) begonnen. Es wurde ein wenig Gas entwickelt, aber der Druck hielt sich bald auf dem Wert 0,27 mm unverändert. Das Rohr wurde in diesem Zustand (ohne Entladung) die Nacht über belassen. Am nächsten Tag war der Druck bis auf 0,075 mm gesunken. Entladung ergab eine am Anfang sehr rasche Gasabgabe bis zu einem Druck von 0,31 mm, der sich konstant hielt.

Es zeigte sich also, daß von einem Zustand, in dem durch Entladung mit einer gewissen Stromstärke ein konstanter Druck erreicht ist, eine Absorption auch ohne Entladung stattfindet. Der durch Entladung erreichte konstante Druck ist also eine Art von stationärem Gleichgewicht zwischen Vorgängen von entgegengesetzter Richtung aufzufassen.

Es wurde mit Pt- und Au-Elektroden eine Reihe Versuche angestellt, und vor allem wurde untersucht, ob eine Vergrößerung der Kathodenspannung auch eine Vergrößerung der Absorption zur Folge habe, aber immer mit negativem Erfolg. Man beobachtete immer dieselbe Erscheinung, zuerst eine Druckänderung am Anfang der Entladung, die bald aufhörte, dann aber blieb der Druck immer konstant. Eine konservative Absorption habe ich nicht nachweisen können.

Der unter Umständen absorbierte Wasserstoff scheint nicht mit den festen Körpern in eine so innige Verbindung getreten zu sein, wie es für die anderen Gase nachgewiesen worden ist. Wenigstens ein Teil des absorbierten Wasserstoffs kann, wie wir gesehen haben, durch passende Änderung der Entladungsbedingungen wieder aus dem Rohr entwickelt werden. Im allgemeinen habe ich gefunden, daß, wenn Entladung mit einer Stromstärke i bis zu konstantem Druck stattgefunden hat, ein Strom, der größer als i ist, Gasentwicklung, ein Strom aber, der kleiner als i ist, Absorption geben wird.

Die geringe konservative Absorption von Wasserstoff bestätigt die Richtigkeit der früher gegebenen Erklärung der spezifischen Wirkung der Gasreste.

Absorption und Kathodenserstäubung.

§ 10. Schon in meiner früheren Arbeit¹⁾ bin ich zu der Ansicht gelangt, daß zwischen der elektrischen Absorption und der Zerstäubung des Kathodenmetalles ein enger Zusammenhang besteht, der mit der gegebenen Erklärung der elektrischen Absorption in gutem Einklang steht. Die Verwandtschaft der beiden Erscheinungen geht deutlich aus den zwischen Absorption und Kathodenfall gefundenen Beziehungen hervor. Für nicht sehr hohe Kathodenspannungen konnte die Absorption in Sauerstoff durch die in Gleichung (4) ausgedrückte einfache Formel bestimmt werden.

1) L. Vegard, l. c. p. 482.

Für die Zerstäubung in Luft haben Holborn und Austin¹⁾ eine ganz ähnliche Relation gefunden:

$$y = k (C - C_0),$$

wo y das Gewicht des in der Zeiteinheit zerstäubten Metalles ist. Um die gefundenen Werte besser zu vergleichen, können wir die Anzahl Atome (μ) berechnen, die für jede Elektrizitätseinheit (Coulomb) absorbiert und zerstäubt wird.

In Tab. IV sind die Werte von $\mu/2N$ gegeben. N ist die Anzahl Moleküle in 1 cm^3 Gas.

Tabelle IV.

 $\mu/2N$

Elektroden	Absorption	Zerstäubung
Au	$1,25 \times 10^{-4} (C - C_0')$	$1,35 \times 10^{-4} (C - C_0)$
Pt	$0,90 \times 10^{-4} (C - C_0'')$	$0,81 \times 10^{-4} (C - C_0)$

Wir sehen, daß für denselben Wert von $C - C_0$ die absorbierte und die zerstäubte Anzahl Atome von derselben Größenordnung ist, und sowohl Zerstäubung wie Absorption verlaufen schneller für Gold- als für Platinelektroden.

Da die Absorptionsversuche in Sauerstoff, die Zerstäubungsversuche aber in Luft vorgenommen worden sind, lassen sich die Ergebnisse nicht vergleichen.

Der in Tab. IV angedeutete Zusammenhang zwischen Zerstäubung und Absorption machte es indessen wünschenswert, die Zerstäubung mit reiner Gasfällung zu bestimmen, und zwar so, daß sowohl Absorption wie auch Zerstäubung für dasselbe Rohr bestimmt wurden; es wurde deshalb eine Reihe Versuche über Zerstäubung in reinen Gasen geplant.

Während dieser Arbeit wurde ich auf die ausgedehnten Untersuchungen aufmerksam, die V. Kohlschütter²⁾ über

1) Wissenschaftl. Abh. d. Physik.-Techn. Reichsanst. 4. p. 101. 1904.

2) V. Kohlschütter u. R. Müller, Zeitschr. f. El. Chem. 12. p. 365. 1906; 12. p. 869. 1906. V. Kohlschütter u. Th. Goldschmidt, Zeitschr. f. El. Chem. 14. p. 221. 1908; p. 417, 437 u. 681; 15. p. 316 u. 930. Vgl. auch: F. Fischer u. O. Hähnel, Zeitschr. f. El. Chem. 14. p. 366, 433, 677, ferner F. Fischer, l. c. 15. p. 512 und J. Stark, l. c. 14. p. 752. 1908; 15. p. 509. 1909.

Kathodenzerstäubung ausgeführt hat. Meine Versuche beschränken sich deshalb nur auf Sauerstoff für Gold- und Platinelektroden, und die Frage wurde nicht weiter verfolgt.

Meine Ergebnisse stimmen mit denjenigen von Kohlschütter gut überein; da sie aber einer ganz anderen Röhrenform entsprechen, dürften sie trotzdem nicht ohne Interesse sein und sollen deshalb hier kurz mitgeteilt werden.

Es wurde das in Fig. 1 angegebene Rohr benutzt. Die Kathode wurde vor und nach jedem Versuch gewogen. Die Wage war mit Spiegelablesung versehen und gestattete eine Genauigkeit von etwa 0,005 mgr.

Um die für jede Coulomb zerstäubte Menge zu bestimmen, mußte man den von der Kathodenplatte ausgehenden Strom kennen. In der Tat ging der größte Teil des Stromes von der Kathodenplatte aus, aber ein ganz kleiner Teil kam von dem kurzen Ende des Zuleitungsdrahtes her. Um die Zerstäubungsmessungen für die Wirkung dieses Drahtes zu korrigieren, wurden Versuche angestellt, die sich nur durch verschiedene Längen dieses Drahtes unterschieden, und hieraus konnte die erwähnte Korrektur bestimmt werden.

In den Tabb. V und VI sind die korrigierten Zahlen angegeben. Außerdem sind noch einige der von Kohlschütter gefundenen Zahlen hinzugefügt.

Tabelle V.

Goldelektroden in Sauerstoff.

Verfasser					V. Kohlschütter	
Nr.	<i>p</i>	<i>i</i>	<i>C</i>	δ	<i>C</i>	δ
1	0,050	0,21	2400	1,58	1500	1,63
2	0,050	0,22	2200	1,67	1400	1,55
3	0,077	0,097	1500(?)	1,38	1400	1,51
4	0,060	0,29	1350	1,47	1200	1,55
5	0,077	0,22	1270	1,44	1200	1,55
6	0,077	0,22	1180	1,18	1100	1,24
7	0,100	0,11	1100	1,23	1100	1,26
8	0,077	0,10	870	0,61(?)	1000	0,97
9	0,100	0,10	870	0,95	850	0,70
10	0,100	0,20	830	0,93	800	0,66
11	0,25	0,91	740	0,45	700	0,47
12	0,25	1,00	710	0,49	635	0,35
13	0,24	0,38	450	0,094	490	0,10
14	0,23	0,12	363	0,02	395	0,02

 $i = 7 \times 10^{-4}$ Amp.

Tabelle VI.

Platinelektroden in Sauerstoff.

Nr.	Verfasser				V. Kohlschütter	
	p	i	C	δ	C	δ
		10^{-3} A.				
1	0,05	0,175	> 1800	0,94	1700	0,93
2	0,05	0,175	1800	0,88	1500	0,93
3	0,05	0,200	1300	0,86	1300	0,78
4	0,07	0,175	920	0,73	1000	0,75
5	0,20	0,70	900	0,72	980	0,63
6	0,19	0,62	680	0,27	950	0,59
7	0,31	1,56	480	0,017	800	0,29
8	0,20	0,30	500	0,047	635	0,10
9	0,14	0,92	500	0,095	420	0,02

 $i = 7 \times 10^{-4}$ Amp.

Die Größe δ bedeutet die Anzahl von Metallatomen, die für jedes durchgegangene Elementarquantum e im Durchschnitt zerstäubt wird.

Wir sehen, daß die Zerstäubung von einer Spannung von etwa 500 Volt mit steigendem Kathodenfall rasch in die Höhe geht und sich zuletzt einem Grenzwert nähert, der bei einer Spannung von etwa 1500 Volt erreicht ist.

Für Platin wird im Durchschnitt für jedes e beinahe 1 Atom zur Zerstäubung gebracht, für Gold annähernd 1,6 Atom.

Trotz der Verwendung verschiedener Stromstärken erhielten Kohlschütter und der Verfasser sehr übereinstimmende Werte für δ . Das rührt daher, daß für dieselbe Kathodenspannung die zerstäubte Menge proportional der Stromstärke ist, oder δ ist von der Stromstärke unabhängig. Dieses Gesetz geht auch aus den Versuchen (3—4) und (6—7), Tab. V, hervor, scheint aber nur für höhere Kathodenfälle zu gelten. Für Kathodenfälle, die in der Nähe des Schwellenwertes liegen, scheint nach den Versuchen 7, 8, 9, Tab. VI, δ mit steigender Stromstärke abzunehmen.

Die für Zerstäubung in Sauerstoff gefundenen Gesetzmäßigkeiten sind den für die Absorption gefundenen sehr ähnlich. Beide Vorgänge fangen oberhalb eines gewissen Schwellenwertes der Spannung an und sind wesentlich von der Kathoden-

spannung abhängig. Mit steigender Spannung werden beide eine obere Grenze erreichen. Fig. 5 gibt die Zerstäubung δ als Funktion vom Kathodenfall.

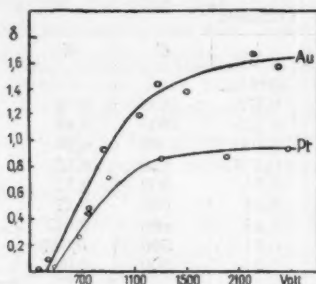


Fig. 5.

Für Stickstoff gibt Kohlschütter eine lineare Verbindung zwischen Zerstäubung und Kathodenspannung an; er nimmt jedoch an, daß diese Relation nur für geringere Kathodenfälle gilt, und auch für Stickstoff wird die Zerstäubung einen gewissen Grenzwert nicht überschreiten können. Übrigens läßt sich ein Vergleich zwischen Absorption und Zerstäubung für sehr hohe Spannungen kaum durchführen; denn in diesem Bereich sind Störungen durch Restgase und entsprechende Schwankungen der Resultate kaum zu vermeiden. Für geringere Kathodenfälle ist ein auffallender Unterschied zwischen den Gesetzen der Absorption und Zerstäubung zu bemerken; denn während die Zerstäubung für normalen Kathodenfall sehr gering ist, werden wir bei dieser Spannung noch eine beträchtliche Absorption finden. Eine Erklärung für diese Eigentümlichkeit kann ich nicht geben; möglicherweise ist sie durch verschiedene Rohr- und Entladungsbedingungen verursacht.

Die Wirkung eines starken Magnetfeldes auf Absorption und Zerstäubung.

§ 11. Zur Beantwortung der Frage, inwieweit die Absorption und Zerstäubung von der Entladungsform abhängig sind, wurde das Rohr während der Entladung der Wirkung eines starken Magnetfeldes ausgesetzt.

Ein Rohr von der in Fig. 1 angegebenen Form wurde zwischen den Polen eines Elektromagnets in der Weise aufgestellt, daß die Kraftlinien senkrecht zu der Röhrenachse standen und die Kathode gerade in den stärksten Teil des Feldes kam. Mit dem benutzten Magnetstrom von 20 Amp. wurde eine Feldstärke von 2700 Gauss gemessen.

Das Feld verursachte eine bedeutende Veränderung der Entladung. Die ganze positive Säule wurde dunkel und nur zwischen Kathode und Glaswand waren helle strahlenartige Entladungserscheinungen zu beobachten.

Am Anfang wurde eine Wirkung des Magnetfeldes auf die Absorption gefunden, und zwar derart, daß das Feld eine Verminderung der Absorption gab. Es zeigte sich indes in der Wiederholung der Versuche die Wirkung des Feldes stets geringer wurde, und zuletzt war überhaupt keine Wirkung mehr zu bemerken. In einer Versuchsreihe z. B. wurden im Endzustand die folgenden Zahlen gefunden: ohne Feld $\eta = 3,80$ ($C = 1200$ Volt), mit Feld $\eta = 3,92$ ($C = 1250$ Volt).

Die Versuchsergebnisse lassen sich einfach durch die Annahme erklären, daß die dauernde Absorption vom Magnetfeld unabhängig ist. Die am Anfang durch das Feld verursachte Abnahme läßt sich dadurch erklären, daß die Deformation der Entladung neue Teile des Rohres zur Gasabgabe bringt.

Auch die Zerstäubung wird nicht von dem Magnetfeld beeinflusst. Mit einer Kathodenspannung von 1350 Volt wurde ohne Magnetismus eine Zerstäubung $\delta = 0,84$ und mit Magnetismus $\delta = 0,88$ beobachtet.

Sämtliche Versuche wurden mit Platinelektroden in Sauerstoff ausgeführt.

Die Tatsache, daß sowohl die konservative Absorption als die Zerstäubung von dem Magnetfeld unabhängig ist, bestätigt von neuem die nahe Verwandtschaft der beiden Vorgänge. Das Ergebnis spricht auch gegen die von Willows aufgestellte Behauptung, daß die Gase von der Glaswand absorbiert werden. Denn man sollte nach Willows eine Änderung der Absorption mit Änderung der Entladungsform erwarten.

Daß die Erklärung von Willows nicht richtig sein kann — oder daß wenigstens die Vereinigung mit dem Glas für die

konservative Absorption eine unbedeutende Rolle spielt —, geht auch daraus hervor, daß die Absorption von der Beschaffenheit der inneren Oberfläche des Rohres unabhängig ist. Es zeigte sich nämlich, daß der durch langen Betrieb des Rohres verursachte, ganz undurchsichtige Metallbelag keine Wirkung auf die Absorption hatte. Nach ausgedehnten Versuchen mit N_2 wurde der Belag entfernt und das Rohr wieder aufgesetzt, worauf eine Entladung mit den nicht zerstäubenden Al-Elektroden längere Zeit durch das Rohr geschickt wurde. Dann wurden wieder Versuche mit Fe-Elektroden angestellt. Die Messungen lieferten folgendes Ergebnis: Mit Belag $\eta = 1,57$ und unter denselben Bedingungen ohne Belag $\eta = 1,56$.

Besprechung der gefundenen Resultate.

§ 12. Die Versuche haben zu der Unterscheidung zwischen zwei Arten von Absorption geführt: einer dauernden, verhältnismäßig wohldefinierten Absorption — konservative Absorption — und einer Reihe verschiedener Absorptionsvorgänge, die verschiedenen Ursprungs sein können, und die wir unter dem Namen nicht-konservative Absorption zusammenfassen wollen.

Die nicht-konservative Absorption kann sowohl bei geringer wie bei hoher Kathodenspannung vorkommen; aber diese Absorption hängt wesentlich von dem Zustand und der Vorgeschichte des Rohres ab und verschwindet mit der Dauer des Betriebes.

Chrisler hat in einer Reihe von Fällen am Anfang der Entladung eine dem Faradayschen Gesetze entsprechende Absorptionsgeschwindigkeit beobachtet. Trotz einer ausgedehnten Reihe von Versuchen, die ich mit möglichst reinen Elektroden vorgenommen habe, ist es mir nicht gelungen, die von Chrisler gefundene einfache Gesetzmäßigkeit nachzuweisen. Ich habe wohl für die konservative Absorption eine Maximalgeschwindigkeit gefunden, die wenigstens der Größenordnung nach dem Faradayschen Gesetz entspricht; aber diese nur bei hoher Spannung und geringem Druck gefundenen Werte sind nicht mit den Beobachtungen von Chrisler zu vergleichen, die bei größeren Drucken von 2—3 mm gemacht worden sind, und deshalb wohl der nicht-konservativen Absorption zugehören. Meiner Erfahrung nach wird nämlich die Anfangsgeschwindigkeit bei niedrigerem Kathodenfall von

der Vorgeschichte des Rohres wesentlich abhängig sein, und ob man eine dem Faradayschen Gesetz entsprechende Geschwindigkeit findet, beruht auch auf der benutzten Stromstärke.

Für gewisse Zustände des Rohres würde man auch bei den von Chrisler benutzten Drucken finden, daß die Absorption pro Coulomb q in der Weise mit der Stromstärke variiert, daß für kleine Stromstärken q größer, für große Stromstärken q kleiner als der durch das Faradaysche Gesetz bestimmte Wert gefunden würde. Es muß dann selbstverständlich in dem Beobachtungsgebiet eine Stromstärke vorhanden sein, die eine genaue Absorption nach dem Faradayschen Gesetz ergeben würde. Diese Stromstärke würde aber in den verschiedenen Fällen eine verschiedene sein. Diese Tatsache gestattet jedoch nicht, dem Faradayschen Gesetz für die elektrische Absorption eine besondere Stellung einzuräumen.

Sollte die von Chrisler angegebene Gesetzmäßigkeit eine Bedeutung haben, müßte man erstens einen wohldefinierten Zustand des Rohres angeben können, für den man die Gesetzmäßigkeit findet, und außerdem müßte man für einen gegebenen Zustand der Gesetzmäßigkeit für ein endliches Stromintervall haben; aber, wie schon erwähnt, habe ich einen Gültigkeitsbereich dieser Art für die von Chrisler angegebene Gesetzmäßigkeit nicht nachweisen können.

Die von Chrisler gefundenen Absorptionsgesetze entsprechen wenigstens nicht dem Endzustand des Rohres. Die Absorption im Endzustand, oder die sogenannte konservative Absorption, ist aber wesentlich von Kathodenspannung abhängig, und für die von Chrisler benutzten Drucke ist sie wenigstens für Sauerstoff und Helium beinahe verschwindend klein.

Für die konservative Absorption haben sich die zuerst mitgeteilten Ergebnisse¹⁾ und Anschauungen bestätigt.

Für Sauerstoff, Stickstoff und auch für Helium ist eine mit wachsendem Kathodenfall steigende Absorption gefunden worden; eine solche ist aber nicht für Wasserstoff beobachtet worden.

1) L. Vegard, Phil. Mag. (6) 18. p. 465. 1909.

Die Annahme Willows, daß die Absorption durch eine Art chemische Vereinigung zwischen Gas und Glaswand zustandekomme, muß wenigstens für die konservative Absorption aufgegeben werden; denn erstens liefert diese Hypothese keine Erklärung für die Abhängigkeit der Absorption vom Kathodenfall, zweitens ist die konservative Absorption von der Oberflächenbeschaffenheit der inneren Glaswand unabhängig gefunden worden und wird auch durch die Störungen eines starken Magnetfeldes nicht geändert, und endlich ist ein direkter Beweis dafür geführt worden, daß wenigstens ein Teil der Absorption mit dem Kathodenmetall verknüpft ist.

Dagegen führt das gefundene Gesetz der elektrischen Absorption zu der schon in meiner ersten Veröffentlichung geäußerten Anschauung, nach der die elektrische Absorption in der großen Geschwindigkeit der positiven Ionen (S_1 -Strahlen) vor der Kathode ihre primäre Ursache hat.

Eine neue Stütze erhält diese Hypothese durch den Nachweis der nahen Verwandtschaft zwischen der Absorption und der Zerstäubung der Kathode; denn es ist ja ein naheliegender Gedanke, in den Ionenstößen die Ursache der Zerstäubung zu erblicken. In der Tat hat Goldstein¹⁾ nachgewiesen, daß die Kanalstrahlen auf Metallen zerstäubend wirken, und Stark hat vor mehreren Jahren die Ansicht vertreten, daß auch die Zerstäubung der Kathode eine Wirkung der schnell laufenden Ionen ist.

Aber erst im Jahre 1911 wurde ich durch die Arbeiten Kohlschüppers, auf die ich damals aufmerksam wurde, mit den Ansichten Starks bekannt. Obwohl also Stark zuerst zu der Erklärung der Kathodenzerstäubung durch Ionenstoß gelangt ist, bleibt es doch immerhin von Interesse, daß ich, unabhängig davon, durch Untersuchungen über die elektrische Absorption zu derselben Anschauung der Zerstäubung gelangt bin.

In meiner im Jahre 1910 der „Kristiania Videnskapselskap“ eingereichten Arbeit, in der ich den Zusammenhang zwischen Absorption und Zerstäubung bespreche, bin ich zu der Ansicht gekommen, daß die Verbindung von Gas und Metall bei der konservativen Absorption nicht als eine Okklusion aufzufassen ist; denn dazu ist die Vereinigung zu dauer-

1) E. Goldstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 4, p. 228. 1902.

haft. Die Vereinigung erinnert vielmehr an eine Art chemische Verbindung, die aber, wie es scheint, durch eine besondere Verbindungsfähigkeit der schnell bewegten positiven Strahlen zustandekommt.

Die in der erwähnten Arbeit vertretene Anschauung habe ich u. a. folgendermaßen ausgedrückt:

„Whatever may be the view we take about the mechanism of the process we cannot escape from the assumption that gas is attached to the metal and carried away with the metallic deposit“, und weiter:

„The previous results suggest that the electric discharge imparts to the gas a new kind of combining power called 'electric affinity', which probably is a function of the cathode fall, and which is a power attached to ions moving with a high velocity.“

Nach dieser Ansicht ist die elektrische Absorption als eine spezifische Kanalstrahlenreaktion zu verstehen, und so aufgefaßt, erklären die gefundenen Beziehungen der elektrischen Absorption einfach und befriedigend sowohl die Abhängigkeit vom Kathodenfall als auch den Zusammenhang mit der kathodischen Zerstäubung.

In der letzten Zeit ist die Möglichkeit von spezifischen chemischen Wirkungen der Kanalstrahlen von mehreren Forschern erkannt worden.¹⁾ Es soll hier erwähnt werden, daß sowohl Dechend und Hammer²⁾ wie auch Kohlschütter³⁾ direkte Versuche angestellt haben, um eine solche spezifische Wirkung nachzuweisen. Während Dechend und Hammer eine verschiedene Wirkung der neutralen und positiven Strahlen angeben, kommt Kohlschütter zu dem Ergebnis, daß die von ihm untersuchten Reaktionen nicht notwendig als spezifische Kanalstrahlenreaktionen gedeutet werden dürfen, sondern als Sekundärprozesse aufgefaßt werden können.

In der Tat wäre es auch möglich — was auch Kohlschütter⁴⁾ angenommen hat —, die elektrische Absorption als

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6) 24. p. 234. 1912.

2) H. v. Dechend u. W. Hammer, Zeitschr. f. Elektr. Chem. 17. p. 235. 1911.

3) V. Kohlschütter, Zeitschr. f. Elektr. Chem. 17. p. 393. 1911.

4) V. Kohlschütter u. Th. Goldschmidt, Zeitschr. f. Elektr. Chem. 14. p. 221. 1908.

einen sekundären Vorgang in der Weise zu erklären, daß dem zerstäubten Metall die eigenartige Verbindungsfähigkeit zukommt. Ob eine solche Annahme berechtigt ist, wird man wohl erst dann beantworten können, wenn die chemischen Reaktionen von Metallstaub moleküler Größenordnung untersucht worden sind.

Es sind in der Tat ganz besondere Bedingungen nötig, um die in Frage kommenden Verbindungen hervorzubringen, die selbst nicht bei hohen Temperaturen stattfinden. So gab eine Platinelektrode keine Absorption, wenn sie bis zur Weißglut erhitzt wurde; Entladung durch das Gas war notwendig, um die Absorption zu bewirken.

Von besonderer Bedeutung ist das für Absorption und Zerstäubung gleichzeitige Auftreten eines Schwellenwertes. Stark¹⁾ hat mit Recht den Wert dieser Spannungsschwelle betont und hat sie dadurch zu erklären versucht, daß eine gewisse maximale Energie nötig sei, um die Bindungsenergie der Metallmoleküle aufzuheben. In einer seiner letzten Arbeiten gibt Kohlschütter²⁾ eine andere Erklärung. Er untersucht die Bedingungen dafür, daß der Metallstaub aus der Anziehungssphäre der Kathode weggeführt wird; er gelangt zu der Auffassung, daß auch für größere Drucke und normalen Kathodenfall die Zerstäubung stattfindet, daß aber der Staub zu der Kathode zurückgezogen wird.

Wäre diese von Kohlschütter verfochtene Anschauung richtig, dann könnte man aus den früher angegebenen Beobachtungen über die Absorption in Sauerstoff schließen, daß die konservative Absorption nicht sekundär als eine Reaktion zwischen Metallstaub und Gas aufgefaßt werden kann; denn sowohl Absorption wie Zerstäubung zeigen Schwellenwerte von ungefähr derselben Größe, und die beiden Vorgänge hören bei geringer Kathodenspannung auf. Nach Kohlschütter sollte auch bei normaler Kathodenspannung Metall zerstäubt werden, sollte aber *durch das Gas* verhindert werden, aus dem Anziehungsbereich der Kathode herauszukommen, deshalb kann — vorausgesetzt, daß die Verbindungsfähigkeit vorhanden ist — nicht verhindert werden, daß sich der Staub

1) J. Stark, Zeitschr. f. Elektr. Chem. 15. p. 509. 1909.

2) V. Kohlschütter, Zeitschr. f. Elektr. Chem. 18. p. 837. 1912.

mit dem Gas verbindet. Ob sich der Staub an der Glaswand oder an der Kathode niederschlägt, wäre für die Absorption gleichgültig, und man müßte auch bei normaler Kathodenspannung eine der primär zerstäubten Menge entsprechende Absorption beobachten.

Da für Sauerstoff sowohl Absorption wie auch Zerstäubung für normale Kathodenspannung fast verschwindet, muß sicher eine der von Kohlschütter verfochtenen Auffassungen keine Berechtigung haben. Entweder muß die elektrische Absorption als eine direkte Kanalstrahlenreaktion aufgefaßt werden, oder man muß die von Kohlschütter vorgeschlagene Erklärung des Schwellenwertes aufgeben.

Obwohl ich auf Grund der ausgedehnten Untersuchungen über elektrische Absorption geneigt bin, diese für eine spezifische Kanalstrahlenreaktion zu halten, wäre es doch verfrüht, auf Grund unserer jetzigen Beobachtungen sichere Schlüsse ziehen zu wollen. Mit Sicherheit können wir aber soviel sagen: *Die konservative elektrische Absorption ist mit der Kathode verknüpft und ist irgendwie (primär oder sekundär) durch die schnell bewegten, auf die Kathode stoßenden positiven Ionen (S_1 -Strahlen) verursacht.*

Wie ich schon in meiner früheren Arbeit¹⁾ erwähnt habe, liegt es nahe, die Bindung des Gases bei der elektrischen Absorption mit der Bindung von Helium in den radioaktiven Mineralien in Zusammenhang zu bringen. In beiden Fällen wird das Gas mit großer Geschwindigkeit in der Form von Strahlen in die feste Substanz hineingeschossen. Es ist möglich, daß die α -Strahlen mit dem Mineral in eine Art Verbindung reten, derart, daß sie nicht zuletzt als freie Moleküle gebremst werden, sondern in den molekularen Kraftsphären stecken bleiben.

Bei den Versuchen in Kristiania hat mir Herr Cand. real. O. Frivold in vorzüglicher Weise geholfen. Eine bedeutende Reihe der mitgeteilten Beobachtungen verdanke ich ihm, und ich möchte die Gelegenheit benutzen, ihm hierdurch meinen besten Dank zu sagen.

1) Kristiania Videnskapsselskap 1910.

(Eingegangen 15. Mai 1916.)

**3. Über die innere Reibung der Gase.
II. Der zweite Reibungskoeffizient,
die Gustav Kirchhoffschen thermodynamisch-
hydrodynamischen Gleichungen,
die Maxwellsche Gastheorie;
von Max B. Weinstein.**

Der zweite Reibungskoeffizient¹⁾ η' wird in der üblichen Theorie gleich $\frac{1}{3}$ des ersten Reibungskoeffizienten η gesetzt, um den Durchschnitt der Normaldrucke dem statischen Druck gleichzumachen, und um für die Darstellung dieser Normaldrucke die gleichen Formeln wie für die der Hauptdrucke zu gewinnen, so daß Unabhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems eintritt. Im folgenden soll auf thermodynamischer Grundlage nachgewiesen werden, daß jene Beziehung

$$(I') \quad \eta' = \frac{1}{3} \eta$$

thermodynamisch nicht zulässig ist, auch nicht als Näherungsgleichung. Es wird eine Beziehung abgeleitet

$$(I) \quad \eta' = \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{6} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k-1}{\frac{\lambda}{\eta} - 1} \right),$$

in der k das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen und λ die Temperaturleitfähigkeit bedeutet. Die Ableitung geschieht zwar aus einem besonderen Fall; sie erweist sich jedoch als unabhängig von den besonderen Bedingungen. Später wird gezeigt, daß auch die Maxwellsche Gastheorie einen zweiten Reibungskoeffizienten zuläßt, und daß auch dieser von k und λ/η abhängt, wenn auch nicht nach der obigen Beziehung. Zugleich gelangt das Poiseuillesche Problem zur Besprechung und wird der Maxwellschen Theorie eine besondere Darstellung und Deutung für die Druckkomponenten abgewonnen.

Die Gustav Kirchhoffsche Theorie der thermodynamisch-hydrodynamischen Gleichungen der Gase enthält zwar so viel

1) In der Darstellung der Druckkräfte nach Formel (1).

Beziehungen, als Größen zu bestimmen sind, je sechs. Bei besonderen Anwendungen auf Bewegungen, für die bestimmte Verhältnisse schon vorausgesetzt werden, wie das fast immer geschieht, gerät man aber dadurch in Schwierigkeiten, daß mehr Gleichungen vorhanden sind als noch zu bestimmende Größen. Und hier zeigen sich namentlich die thermodynamischen Beziehungen als verhängnisvoll, weil sie in ihrer Form so ganz und gar von den Bewegungsgleichungen abweichen. Will man die Voraussetzungen gleichwohl aufrechterhalten, so ist man gezwungen, einerseits die Aufgabe noch weiter einzuschränken, andererseits von den üblichen, d. h. ohne Berücksichtigung der thermodynamischen Verhältnisse gemachten, Annahmen über die Konstanten der Grundgleichungen abweichende anzusetzen. Da nun an der Zulässigkeit der betrachteten Bewegungen nicht zu zweifeln ist und die Notwendigkeit, die thermodynamischen Verhältnisse an sich zu berücksichtigen, doch außer Frage steht, so muß die Berechtigung der abweichenden Annahmen, wie etwa der unter (I) gegebenen, anerkannt werden. Das betrifft die übliche Theorie. In der Maxwell'schen Theorie aber gibt es, wie zu zeigen sein wird, an sich überhaupt keine expliziten Gleichungen für die Druckkomponenten, sondern nur simultane Differentialgleichungen, und kann man selbst solche von den verschiedensten Formen — nicht bloß Annäherungen — herstellen.

Sei p der statische Druck, μ die Dichte, θ die absolute Temperatur des Gases, u, v, w mögen seine Bewegungsgeschwindigkeiten bedeuten. Das Gas soll sich wie ein ideales verhalten. Die Ausdehnung der Rechnungen auf nicht ideale Gase ist nicht schwer, wäre aber, da noch nicht einmal eine allgemein anerkannte Zustandsgleichung für sie vorhanden ist, verfrüht. Die Druckkomponenten in G. Kirchhoffs Bezeichnungsweise sind

$$(1) \quad X_x = p - 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} + 2\eta' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

$$(2) \quad X_y = Y_x = -\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

und entsprechend $Y_y, Z_x, Y_z = Z_y, Z_z = X_z$.

Ich gehe vom Poiseuilleschen Problem aus, das ja für die Bestimmung des Reibungskoeffizienten und des Leitungskoeffizienten von so großer Bedeutung geworden ist. Die

Bewegung gehe also in einer geraden zylindrischen Röhre stationär in Richtung der Achse, die die x -Achse sein soll, vor sich. r bedeute eine Strecke senkrecht zur x -Achse. Die Kontinuitätsgleichung und die Gasgleichung geben dann

$$(3) \quad \mu u = c, \quad (4) \quad \vartheta = \frac{m}{Rc} p u,$$

c ist von x unabhängig, kann jedoch noch von r abhängen. Wenn die Bewegung nicht besteht, soll auch der Stoff nicht vorhanden sein, sonst hätten ja Gleichungen wie (3) und (4) keinen Sinn. Bei der üblichen Lösung des Poiseuilleschen Problems werden die thermodynamischen Verhältnisse nicht berücksichtigt. Ziehen wir diese jedoch mit in Rechnung, so lauten die Differentialgleichungen für die betrachtete Bewegung unter Berücksichtigung von (3)

$$(5) \quad \begin{cases} c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left((\eta - \eta') \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ 0 = -\frac{\partial}{\partial r} \left(p - (\eta - 2\eta') \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ Jc \left(c_v \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{p}{Jc} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2(\eta - \eta') \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \\ \quad + Jc_v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \right]. \end{cases}$$

Die Größen η , η' , λ sind insofern von x und r abhängig, als sie Funktionen sind der Temperatur ϑ , die ihrerseits durch x und r bestimmt ist. Davon soll zunächst abgesehen werden. Die Gleichungen sind dann

$$(5) \quad \begin{cases} c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2(\eta - \eta') \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ 0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(p - (\eta - 2\eta') \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ c Jc_v \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 2(\eta - \eta') \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \\ \quad + Jc_v \lambda \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \right]. \end{cases}$$

Dazu kommen die bekannten Bedingungsgleichungen an der Wandung der Röhre, den Enden usf. Daß die übliche Lösung des Poiseuilleschen Problems, wenn auch den beiden ersten Gleichungen, doch der letzten Gleichung nicht genügen kann, ist klar, oder man muß p und u überhaupt konstant

nehmen, was nur ein Durchschieben des Gases bedeuten würde. Wir setzen

$$(6) \quad u = \sum_i e^{a_i x} U'_i, \quad (7) \quad p = \sum_i e^{a_i x} P_i,$$

wo die U' und die P Funktionen sind nur von r . Die zweite Gleichung gibt

$$(8) \quad P_i = a_i(\eta - 2\eta') U'_i + C_i,$$

wo C_i eine Konstante ist. Aus der ersten Gleichung folgt dann

$$c a_i U'_i = -a_i (C_i + a_i(\eta - 2\eta') U'_i) + 2(\eta - \eta') a_i^2 U'_i \\ + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U'_i}{\partial r} \right),$$

oder indem

$$(9) \quad U'_i = U_i + B_i, \quad (10) \quad a_i C_i + B_i(c - \eta a_i) a_i = 0$$

gesetzt wird

$$(11) \quad a_i(c - \eta a_i) U_i = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_i}{\partial r} \right) + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_i}{\partial r} \right).$$

B ist als bekannt anzusehen, da c bekannt sein soll. Wir nehmen c auch als von r unabhängig an. Für diese besondere Bewegung sind nun die U_i proportional Besselschen Funktionen J_0 nullter Ordnung vom Argument

$$a_i \frac{c - \eta a_i}{\eta} r.$$

Die übliche Lösung des Poiseuilleschen Problems bekommt man mit a_i als unendlich kleiner Größe. Hängt c von r ab, so wird die Lösung andere Funktionen ergeben als Besselsche, falls die Abhängigkeit nicht eine solche ist, daß

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B}{\partial r} \right) = 0$$

sich findet, ein Fall, der von vornherein ausgeschlossen ist, da er $B = c' \log r + c''$ ergeben würde.

Mit konstantem c also haben wir

$$(12_1) \quad U'_i = A_i J_{0i} + B_i, \quad (12_2) \quad P_i = A'_i J_{0i} + B'_i,$$

wobei

$$(13) \quad A'_i = a_i(\eta - 2\eta') A_i,$$

$$(14) \quad B'_i = B_i(a_i(\eta - 2\eta') - c + a_i \eta)$$

ist. Wenn $r = 0$ sein sollte, fällt die Gleichung für B' fort, B' ist dann selbständige Konstante. Zugleich soll also sein

$$(15) \quad a_i(c - \eta a_i) J_{0i} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial J_{0i}}{\partial r} \right).$$

Die a_i bestimmen sich durch die Grenzbedingung für die Bewegung an der Röhrenwandung. Ist $\bar{\eta}$ der Koeffizient der Reibung zwischen Gas und Röhrenwandung, u_0 die Geschwindigkeit an dieser Wandung und r_0 der innere Radius der Röhre, so gibt diese Grenzbedingung

$$(16) \quad \eta \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \bar{\eta} u_0, \text{ u. f. } (17) \quad \eta \left(\frac{\partial J_{0i}}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \bar{\eta} (J_{0i})_{r=r_0} + \frac{B_i}{A_i} \bar{\eta}.$$

Soweit bestehen, wenigstens formell, keine Schwierigkeiten. Wenn nun die Gasgleichung auch in der Bewegung erfüllt sein soll, was gerade für solche Bewegungen gefordert werden muß, wie sie in den Experimenten zur Anwendung kommen, nämlich langsamen, so haben wir

$$(18) \quad \vartheta = \frac{m}{Rc} \sum_i e^{a_i x} P_i \sum_k e^{a_k x} U'_k = \frac{m}{Rc} \sum_i \sum_k e^{(a_i + a_k)x} P_i U'_k$$

zu setzen. Da nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \frac{m}{Rc} \sum_i \sum_k (a_i + a_k) e^{(a_i + a_k)x} P_i U'_k, \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} &= \frac{m}{Rc} \sum_i \sum_k (a_i + a_k)^2 e^{(a_i + a_k)x} P_i U'_k, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) &= \frac{m}{Rc} \sum_i \sum_k e^{(a_i + a_k)x} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_i U'_k}{\partial r} \right); \\ p \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_i e^{a_i x} P_i \sum_k a_k e^{a_k x} U'_k = \sum_i \sum_k a_k e^{(a_i + a_k)x} P_i U'_k, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 &= \sum_i \sum_k a_i a_k e^{(a_i + a_k)x} U'_i U'_k, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 &= \sum_i \sum_k e^{(a_i + a_k)x} \frac{\partial U'_i}{\partial r} \frac{\partial U'_k}{\partial r} \end{aligned}$$

die beiden letzten Gleichungen mit dem bekannten Vorbehalt geschrieben, so folgt aus der thermodynamischen Gleichung

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{e J m c_v}{Rc} (a_i + a_k) (P_i U'_k + P_k U'_i) + (a_k P_i U'_k + a_i P_k U'_i) \\ &= 2(\eta - \bar{\eta}) a_i a_k (U'_i U'_k + U'_k U'_i) + \eta \left(\frac{\partial U'_i}{\partial r} \frac{\partial U'_k}{\partial r} + \frac{\partial U'_k}{\partial r} \frac{\partial U'_i}{\partial r} \right) \\ &+ \frac{J r_0 \lambda m}{Rc} \left((a_i + a_k)^2 (P_i U'_k + P_k U'_i) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (P_i U'_k + P_k U'_i) \right) \end{aligned} \right.$$

für $i \geq k$. Bei $i = k$ hat man in den () die zweiten Glieder fortzulassen. Diese Gleichungen aber zerfallen wieder in solche nach den Potenzen von r . Und so hat man unendliche Reihen von Beziehungen zwischen der doppelt unendlichen Zahl von Konstanten A_i, B_i . Unberührt bleiben nur die additiven Konstanten, die überhaupt zu p und u noch addiert werden können. Schon diesen Bedingungen wird man mit den A_i, B_i nur in besonderen Fällen gerecht werden können, wozu namentlich auch die Grenzgleichungen (16) werden beitragen müssen.

Nun haben wir aber für die Wärmebewegung noch zwei Grenzbedingungen zu erfüllen. Das ist also nunmehr allgemein nicht möglich, weil die in Betracht kommenden Konstanten durch die thermodynamische Gleichung aufgebraucht sind. Daraus folgt, daß diese Grenzbedingungen nicht willkürlich angesetzt werden können, sondern nur so weit, als noch Konstanten zur Verfügung stehen. Indem man bei Experimenten nach der Poiseuilleschen Methode die thermodynamischen Verhältnisse unberücksichtigt läßt, beachtet man diese Beschränkung nicht. Daran mag ein Teil der Unstimmigkeiten liegen, die man zwischen den Poiseuilleschen Formeln und der Erfahrung gefunden hat und die selbst in dem viel einfacheren Falle der nicht zusammendrückbaren Flüssigkeiten zu so vielen Erörterungen Anlaß boten.¹⁾ Hiernach muß man statt die Lösung den thermischen Grenzbedingungen anzupassen, umgekehrt diese Grenzbedingungen nach der Lösung einrichten. Die Hauptgrenzbedingung ist hier $\vartheta_0 = \bar{T}$, wo ϑ_0 die Temperatur des Gases an der Röhrenwand, \bar{T} die der Röhrenwand am Gase bedeutet. Man kann also nicht \bar{T} willkürlich ansetzen und dann verlangen, daß $\vartheta_0 = \bar{T}$ sein soll. Man muß ϑ_0 zugrunde legen und $\bar{T} = \vartheta_0$ machen, also die Röhrenwand entsprechend erwärmen. Es zeigt sich hieraus, wie unrichtig thermodynamisch das Experiment angelegt sein kann, wenn man durch ein Bad \bar{T} die Röhre entlang von vornherein gleichmacht. Es ist dann gar nicht möglich, der Grenzbedingung $\vartheta_0 = \bar{T}$ und der thermodynamischen Gleichung zugleich gerecht zu werden, und die Be-

1) Für die Flüssigkeiten sei besonders auf die Arbeit von Grüneisen in den Wissenschaftlichen Abhandlungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt 4. p 151ff. 1904 hinzuweisen, auf die ich in einer späteren Untersuchung zurückkomme.

wegung in der Röhre entspricht eben den Voraussetzungen nicht; sie ist weder stationär noch einseitig, mindestens aber das letztere nicht. Hat man sich umgekehrt so eingerichtet, daß $\bar{\vartheta} = \vartheta_0$ wird, so genießt man noch den Vorteil, daß die zweite thermische Grenzbedingung entfällt. Hiernach verfährt man vielleicht am zweckmäßigsten, wenn man die im Glase hinlänglich dünn gewählte Röhre in eine weite andere Röhre steckt und das Gas durch beide Röhren gleicherweise sich bewegen macht, im übrigen aber alles sich selbst überläßt und nur dafür Sorge trägt, daß von außen keine Störungen eintreten.

Die weitere allgemeine Behandlung des Poiseuilleschen Problems darf ich verschieben, da sie für das Folgende nicht von Belang ist.

Die Gleichung (11) zeigt, daß, wenn man (mit $c = \text{const.}$) von vornherein $\alpha = 0$ oder $\alpha = c/\eta$ setzt, U als Konstante anzunehmen ist, da ein $\log r$ nicht gebraucht werden kann. Sehen wir also von allen anderen Teilbewegungen ab, so ist — als Gegenstück zum Poiseuilleschen Problem in seiner üblichen Lösung —

$$(20_1) \quad u = \alpha e^{\frac{c}{\eta} x} + \beta, \quad (20_2) \quad p = \alpha c \frac{\eta - 2\eta'}{\eta} e^{\frac{c}{\eta} x} + \beta'$$

mit c, α, β, β' als Konstanten. Die Röhre muß also jedenfalls sehr eng sein.¹⁾ Die Grenzbedingung (16) würde absolute Glätte der Röhrenwandung gegen das Gas verlangen. Es handelt sich also um einen Grenzfall, der nicht im Bereiche der Unmöglichkeit, sondern nur in dem der praktischen Nichtdurchführbarkeit liegt. Für die Temperatur haben wir

$$(21) \quad \vartheta = \frac{m}{Ec} \left[\alpha^2 c \frac{\eta - 2\eta'}{\eta} e^{\frac{2c}{\eta} x} + \alpha \left(c \frac{\eta - 2\eta'}{\eta} \beta + \beta' \right) e^{\frac{c}{\eta} x} + \beta \beta' \right].$$

Entsprechend muß also die Röhre erwärmt werden, damit die thermische Grenzbedingung erfüllt wird. Schreiben wir

$$\bar{\vartheta} = A e^{\frac{2c}{\eta} x} + B e^{\frac{c}{\eta} x} + C,$$

so folgen die A, B, C aus den δ igen Konstanten, wenn man die Bewegung und den Druck frei wählen will, oder diese Kon-

1) Wobei freilich die von Knudsen so eingehend studierten Erscheinungen (in den Ann. d. Phys.) zu beachten sein würden.

stanten zum Teil aus den A , B , C , wenn das mit der Temperaturierung der Röhre der Fall sein soll.

Damit nun noch die thermodynamische Gleichung erfüllt ist, müssen in ihr die Faktoren von $e^{\frac{c}{\eta} x}$ und $e^{2 \frac{c}{\eta} x}$ einzeln Null sein. Damit bekommt man zwei Gleichungen. Die erste Gleichung

$$(22) \quad \frac{J m c_v}{R} \frac{\eta - 2 \eta'}{\eta} \left(1 - \frac{\lambda}{\eta} \right) c \beta = \left[\frac{J m c_v}{R} \left(\frac{\lambda}{\eta} - 1 \right) - 1 \right] \beta$$

ist eine Beziehung zwischen den Konstanten des Problems; es bleiben also nur drei von ihnen willkürlich. Die zweite Gleichung

$$(I_1) \quad 2 \frac{J m c_v}{R} = \frac{\eta}{\eta - 2 \eta'} + \frac{4 J m c_v}{R} \frac{\lambda}{\eta}$$

ist frei von den Bedingungen des Problems und gibt mit $c_p/c_v = k$, $\lambda/\eta = n$

$$(I_2) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta' &= \frac{\eta}{4} \cdot \frac{3 - k - 4n}{1 - 2n} = \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} \frac{5 - 3k - 4n}{4(1 - 2n)} \\ &= \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{6} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k - 1}{2n - 1} \right), \end{aligned} \right.$$

also die angeführte Beziehung¹⁾ zwischen dem zweiten Reibungskoeffizienten und dem ersten. Sie ist abhängig von dem Verhältnis der spezifischen Wärmen und von der Zahl n , die allgemein $5/4$ (nach Clausius) oder $5/3$ (nach Maxwell) oder 1,6027 (nach O. E. Meyer) sein soll. Der übliche Ansatz $\eta' = 1/3 \eta$ wäre hiernach aus thermodynamischen Gründen nicht zulässig. Für unendlichatomige Gase wäre, wie man auch n ansetzt, $\eta' = \eta/2$, für einatomige 0,611 η , 0,571 η , 0,575 η , je nachdem man für n die Clausiussche, Maxwellsche oder O. E. Meyersche Zahl anwendet. Hiernach gälte auch, wenn man der üblichen Theorie folgt, aus gleichen Gründen der Ansatz $X_s + Y_s + Z_s = 3p$ nicht, und ebenso wenig die Beziehung zu den Hauptdrucken. Die Hauptsache ist, daß η'/η sich als abhängig erweist von k und n und als unter allen Umständen größer als $1/3$. Und so hätten wir entsprechend

1) In meiner Thermodynamik, Bd. I, p. 267ff., habe ich eine einfachere Formel angegeben, indem ich von der Wärmebewegung absehen zu dürfen glaubte. Das ist nicht statthaft; die Größe n darf nicht fehlen.

$$(II) \quad X_x + Y_y + Z_z = p + \eta \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k-1}{2n-1} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Alles, solange die normalen Gasgesetze gelten. Treten diese außer Kraft, so ändern sich die Beziehungen (I), (II), aber selbstverständlich, ohne zu den üblichen Annahmen zu führen. Sie werden sehr verwickelt, selbst wenn man nur das van der Waalssche Gasgesetz benutzt, oder sie beschränken die Lösung.

Reibung und Temperaturleitfähigkeit sind als konstant angesehen worden. Annähernd ändern sich beide proportional einer Potenz von ϑ , die in der Nähe von ϑ^1 liegt. Der Einfachheit wegen nehme ich unmittelbar

$$(23) \quad \eta = \varrho \vartheta = \varrho \frac{m}{R} \frac{p}{\mu} = \varrho \frac{m}{Rc} p u,$$

$$(24) \quad \eta' = \varrho' \vartheta = \varrho' \frac{m}{R} \frac{p}{\mu} = \varrho' \frac{m}{Rc} p u,$$

$$(25) \quad \lambda = \lambda' \vartheta = \lambda' \frac{m}{R} \frac{p}{\mu} = \lambda' \frac{m}{Rc} p u, \quad (26) \quad n = \frac{\lambda'}{\varrho'},$$

n also konstant. Die beiden ersten Bewegungsgleichungen geben nunmehr für unseren Fall, daß u nur von x abhängt

$$(27) \quad \begin{cases} c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2(\varrho - \varrho') \frac{m}{2Rc} \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u^2}{\partial x} \right), \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(p - (\varrho - 2\varrho') \frac{m}{2Rc} p \frac{\partial u^2}{\partial x} \right), \end{cases}$$

also

$$(28_1) \quad cu + C = -p + 2(\varrho - \varrho') \frac{m}{2Rc} p \frac{\partial u^2}{\partial x},$$

$$(28_2) \quad C' = p - (\varrho - 2\varrho') \frac{m}{2Rc} p \frac{\partial u^2}{\partial x},$$

woraus folgt

$$(29) \quad C' + \frac{\varrho - 2\varrho'}{\varrho} (C + C') = p - c \frac{\varrho - 2\varrho'}{\varrho} u$$

und als Gleichung für u

$$(30) \quad C + C' + cu = \frac{m}{2Rc} \varrho \left(C' + \frac{\varrho - 2\varrho'}{\varrho} (C + C' + cu) \right) \frac{\partial u^2}{\partial x}.$$

Dieser Gleichung genügt eine Potenzreihe nach x . Setzt man

$$(31) \quad u = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{R}{m} \frac{c}{\varrho} x + \alpha_2 \left(\frac{R}{m} \frac{c}{\varrho} x \right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{R}{m} \frac{c}{\varrho} x \right)^3 + \dots$$

und

$$(32_1) \quad c' = \frac{c}{C + C' + c \alpha_0}, \quad (32_2) \quad \frac{R}{m} \frac{c}{\varrho} x = \xi,$$

so hat man zur Bestimmung von α_2 , α_3 , usf.

$$(33_1) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 + c'(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots) \\ = \left(1 + \frac{\varrho - 2\varrho'}{\varrho} \alpha_0 \alpha_1 c' (\alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots) \right) \\ \left(1 + \frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_0 \alpha_1} \xi + 3 \frac{\alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3}{\alpha_0 \alpha_1} \xi^2 + \dots \right) \end{aligned} \right.$$

und zugleich ist

$$(34) \quad C + C' + c \alpha_0 = \left(C' + \frac{\varrho - 2\varrho'}{\varrho} (C + C' + c \alpha_0) \right) \alpha_0 \alpha_1 = \frac{c}{\sigma'}.$$

C , C' , c , α_0 bleiben unbestimmt. Aus (29) folgt dann weiter

$$(35_1) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{c}{\sigma' \alpha_0 \alpha_1} + c \frac{\varrho - 2\varrho'}{\varrho} \\ &\left[\alpha_1 \left(\frac{R}{m} \frac{c}{\varrho} x \right) + \alpha_2 \left(\frac{R}{m} \frac{c}{\varrho} x \right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{R}{m} \frac{c}{\varrho} x \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Setzt man übrigens

$$(36) \quad \frac{\varrho - 2\varrho'}{\varrho} \alpha_0 \alpha_1 c' = \frac{1}{\alpha_0'},$$

so hat man auch

$$(33_2) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 + c'(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots) &= \left(1 + \frac{1}{\alpha_0'} (\alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots) \right) \\ &\left(1 + \frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_0 \alpha_1} \xi + 3 \frac{\alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3}{\alpha_0 \alpha_1} \xi^2 + \dots \right) \end{aligned} \right.$$

und

$$(35_2) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{c}{\sigma' \alpha_0 \alpha_1} \left(1 + \frac{1}{\alpha_0'} (\alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \dots) \right), \\ u &= \alpha_0 \left(1 + \frac{1}{\alpha_0'} (\alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \dots) \right). \end{aligned} \right.$$

Die unbestimmten Konstanten sind dann c , c' , α_0' , α_0 . Es ist nunmehr weiter

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta &= m \frac{p u}{R c} = \frac{m}{R c' \alpha_1} \left[1 + \frac{1}{\alpha_0 \alpha_0'} (\alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha_0'} \right) (\alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots) \right]. \end{aligned} \right.$$

Die thermodynamische Gleichung lautet aber nach (5) und (23) bis (26)

$$(38_1) \quad \left\{ \begin{aligned} J c_v c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x} \\ = 2(\varrho - \varrho') \frac{m}{2 R c} p \frac{\partial u^2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + J c_v n \frac{q}{2} \frac{\partial^2 \vartheta^2}{\partial x^2} \end{aligned} \right.$$

und zufolge (28)

$$(38_2) \quad J c_v \left(c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{n q}{2} \frac{\partial^2 \vartheta^2}{\partial x^2} \right) = (C + u) \frac{\partial u}{\partial x},$$

also

$$(39) \quad J c_v \left(c \vartheta - \frac{n q}{2} \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x} \right) = C'' + C u + \frac{u^2}{2}.$$

Setzt man die obigen Werte für ϑ und u ein, so ergibt sich eine Gleichung für die α . Diese ist an sich erfüllbar; aber mit der obigen Gleichung (38₂) läßt sie sich nicht vereinigen, wenn man nicht $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$, also u , ϑ , p , μ konstant nimmt. Berücksichtigt man also in der üblichen Theorie die Abhängigkeit der Reibung und Temperaturleitung von der Temperatur, so ist thermodynamisch in unserem Falle eine andere Bewegung des Gases als ein einfaches Durchschieben nicht möglich.

Nun steht aber bei der früheren Behandlung des Falles nichts im Wege, die Bedingungen so zu wandeln, daß α kleiner und kleiner wird. Die Gleichung (I) bleibt dabei ganz unberührt. Sie bleibt also auch, wenn zuletzt α überhaupt Null ist. Alsdann kommt die frühere Behandlung im Ergebnis überein mit der jetzigen, ohne daß die Gleichung (I) zu bestehen aufhört. Diese Gleichung hat also eine eigene Bedeutung, wenn die übliche Theorie zur Anwendung kommt. Daß diese Bedeutung eine allgemeine ist, kann ich freilich nicht behaupten, weil die Gleichung aus einem besonderen Fall erschlossen wurde. Allein da in ihr von der Besonderheit dieses Falles nichts enthalten ist, möchte man geneigt sein, die allgemeine Bedeutung anzuerkennen, sofern die Reibungskoeffizienten überhaupt von den besonderen Bewegungen unabhängig sind.

Wir wenden uns nun zur Maxwellschen Theorie.

Es seien ξ , η , ζ die Geschwindigkeiten der Molekularbewegung allein, und es bedeute \bar{Q} den Mittelwert einer Größe Q .

Diese Theorie ergibt dann, vor den sonst gemachten Vernachlässigungen,

$$(40) \left\{ \begin{aligned} X_z = p - \frac{1}{3 b \mu} \left[\mu \frac{d \bar{\xi}^2}{dt} + \frac{\partial \mu \bar{\xi} \bar{\xi}^2}{\partial x} + \frac{\partial \mu \bar{\eta} \bar{\xi}^2}{\partial y} + \frac{\partial \mu \bar{\zeta} \bar{\xi}^2}{\partial z} \right. \\ \left. + 2 \mu \left(\bar{\xi} \bar{\xi} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\xi} \bar{\eta} \frac{\partial u}{\partial y} + \bar{\xi} \bar{\zeta} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \end{aligned} \right.$$

und entsprechend Y_y, Z_z . Ferner

$$(41) \left\{ \begin{aligned} X_y = Y_x = - \frac{1}{3 b \mu} \left\{ \mu \frac{d \bar{\xi} \bar{\eta}}{dt} + \frac{\partial \mu \bar{\xi} \bar{\xi} \bar{\eta}}{\partial x} + \frac{\partial \mu \bar{\eta} \bar{\xi} \bar{\eta}}{\partial y} + \frac{\partial \mu \bar{\zeta} \bar{\xi} \bar{\eta}}{\partial z} \right. \\ \left. + \mu \left[\bar{\xi}^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{\eta}^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \bar{\xi} \bar{\eta} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\eta} \bar{\zeta} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\zeta} \bar{\xi} \frac{\partial v}{\partial z} \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

und entsprechend $Y_z = Z_y, Z_x = X_z$. Dabei sind $\bar{\xi}^2$ usf. Mittelwerte der betreffenden Größen; b ist eine Konstante, definiert durch

$$(42_1) \quad b = \frac{1}{3} \frac{R \vartheta}{m \eta} = \frac{1}{3} \frac{p}{\mu} \frac{1}{\eta},$$

worin also η nach Maxwells Theorie proportional ϑ sein soll.

Die Summe der Normaldrucke ergibt nunmehr

$$(43) \left\{ \begin{aligned} X_x + Y_y + Z_z = 3 p - \frac{1}{3 b \mu} \left\{ \mu \frac{d \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2}{dt} \right. \\ \left. + \frac{\partial \mu \bar{\xi} (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2)}{\partial x} + \frac{\partial \mu \bar{\eta} (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2)}{\partial y} + \frac{\partial \mu \bar{\zeta} (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2)}{\partial z} \right. \\ \left. + 2 \mu \left[\bar{\xi}^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\eta}^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \bar{\zeta}^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\xi} \bar{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \bar{\eta} \bar{\zeta} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \bar{\zeta} \bar{\xi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Der in {} gesetzte Ausdruck ist aber nach Maxwells Theorie gleich Null. Also ergibt diese Theorie allerdings $X_x + Y_y + Z_z = 3p$. Aber dazu ist folgendes zu bemerken.

Erstens ist diese Beziehung bei der Ableitung der Druckgleichungen von vornherein angesetzt. Denn es wird ja ursprünglich $X_x = \mu \bar{\xi}^2$, usf. angenommen, was

$$X_x + Y_y + Z_z = \mu (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2)$$

ergibt, und letztere Größe wird auch im Bewegungszustande als $3p$ gleich angesehen. In der Tat lautet die Ausgangsgleichung z. B. für X_x zunächst

$$(44) \quad b \mu (\overline{\xi^2} + \eta^2 + \zeta^2 - 3 \mu \overline{\xi^2}) = \mu \frac{d \overline{\xi^2}}{dt} + \text{usf. wie oben,}$$

also nach den gemachten Angaben

$$(45) \quad 3 b \mu (p - X_x) = \mu \frac{d \overline{\xi^2}}{dt} + \text{usf.}$$

Zweitens entspricht der Ausdruck in {} der Gleichung (43) gleich Null gesetzt der Kirchhoffschen thermodynamischen Gleichung. Mit den obigen Ansätzen und dem Ansatz $X_x + Y_y + Z_z = 3p$ ist also diese Gleichung schon erfüllt. Die Maxwellsche Theorie gibt eben keine besondere thermodynamische Gleichung außerhalb der gemachten und gewöhnlichen Ansätze. Es kann also in dieser Theorie eine solche Gleichung nicht die Rolle einer überschüssigen, dem Ansatz $X_x + Y_y + Z_z = 3p$ widersprechenden Beziehung spielen; sie kann mit ihr nur in Einklang sein. Daß bei der gewöhnlichen Darstellung auch in der Maxwellschen Theorie noch eine besondere thermodynamische Gleichung zum Vorschein kommt, liegt nur an den Vernachlässigungen bei der Aufstellung der Gleichungen für die Druckkomponenten, um diese Komponenten so zu erhalten, wie sie die Hydrodynamik ergibt.

Drittens endlich, und das ist das vielleicht Wesentlichste, sind eben die obigen allgemeinen Maxwellschen Ausdrücke für die Druckkomponenten an sich durchaus verschieden von den hydrodynamischen. Man ist zu letzteren nur gelangt, indem man Größen wie $\overline{\xi \eta}$, $\overline{\xi^2 \eta}$ usf. fortließ, ferner

$$\overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \overline{\zeta^2} = \gamma / \mu$$

setzte und endlich

$$\frac{d \frac{p}{\mu}}{dt} = \frac{d \overline{\xi^2}}{dt} = \frac{d \overline{\eta^2}}{dt} = \frac{d \overline{\zeta^2}}{dt} = - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{p}{\mu}$$

annahme, eine Gleichung, die nur gilt, wenn von Reibung und Wärmeleitung abgesehen wird, und wenn das Gas nur einatomig ist.¹⁾ Man kann aber in den Näherungsrechnungen weiter gehen und überhaupt ganz andere Ausdrücke für die Druckkomponenten ableiten als die hydrodynamischen.

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über die Theorie der Wärme, fünfzehnte bis siebzehnte Vorlesung. Ich muß auch auf meine Thermodynamik, Bd. I, Abschn. 39 u. 40, verweisen.

In $d\bar{\xi}^2/dt$ usf. belassen wir es bei den genauen definitionsmäßigen Werten $d(X_x/\mu)/dt$ usf. Nach Maxwells Theorie ist ferner

$$(46) \quad \begin{cases} \mu \overline{\xi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} = -2Jc_v \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \\ \mu \overline{\eta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} = -2Jc_v \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \\ \mu \overline{\zeta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} = -2Jc_v \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}. \end{cases}$$

Ich setze darum im Sinne ähnlicher Näherungsrechnungen der Maxwellschen Theorie in zweiter Näherung (in erster sollen sie Null sein)

$$(47) \quad \begin{cases} \mu \overline{\xi \xi^2} = \mu \overline{\xi \eta^2} = \mu \overline{\xi \zeta^2} = -\frac{2}{3} Jc_v \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \\ \mu \overline{\eta \xi^2} = \mu \overline{\eta \eta^2} = \mu \overline{\eta \zeta^2} = -\frac{2}{3} Jc_v \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \\ \mu \overline{\zeta \xi^2} = \mu \overline{\zeta \eta^2} = \mu \overline{\zeta \zeta^2} = -\frac{2}{3} Jc_v \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}. \end{cases}$$

Für die Größe $\mu \overline{\xi \eta \zeta}$ habe ich einen zweiten Näherungswert nicht finden können; doch glaube ich, daß auch dieser Null ist. Man bekommt aber nunmehr

$$(48_1) \quad \left\{ \begin{aligned} X_x &= p - \frac{1}{3b\mu} \\ \mu \frac{dX_x}{dt} &- \frac{2}{3} Jc_v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right] \\ &+ 2 \left(X_x \frac{\partial u}{\partial x} + X_y \frac{\partial u}{\partial y} + X_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\}$$

und entsprechend Y_y, Z_z . Ferner

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} X_y &= Y_x = -\frac{1}{3b\mu} \\ \mu \frac{dX_y}{dt} &- \frac{2}{3} Jc_v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) \right] \\ &+ X_x \frac{\partial v}{\partial x} + Y_y \frac{\partial u}{\partial y} + X_y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + Y_x \frac{\partial u}{\partial x} + Z_z \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

und entsprechend $Y_z = Z_y, Z_x = X_z$. Multipliziert man in diesen Gleichungen beiderseits mit p , so soll nach Maxwell $p/3b\mu$ durch η zu ersetzen sein. Es ist aber besser, die Formeln

ungeändert zu behalten, weil η nicht konstant ist. Die vorstehenden Gleichungen haben gar keine Ähnlichkeit mit den üblichen; sie stellen auch keine expliziten Ausdrücke für die Druckkomponenten dar, sondern im Grunde nur Differentialgleichungen, die zusammen mit den Bewegungsgleichungen integriert werden müssen, so daß an sich nach Maxwells Theorie jedem Problem ein besonderer expliziter Ausdruck für die Druckkomponenten zukommt.

Ferner enthalten die Gleichungen zwei Koeffizienten, $\frac{1}{3}b$ und λ , die nicht der Beziehung entsprechen, in der η' zu η nach der üblichen Theorie stehen soll. Nun kann man freilich die X_x, Y_y, Z_z auch so darstellen, daß in ihnen nur ein Koeffizient vertreten ist, $\frac{1}{3}b$. Aus dem Satz, daß die Summe der (48₁) in {} gesetzten Größen in X_x, Y_y, Z_z Null geben soll, erhält man nämlich

$$(50_1) \left\{ \begin{aligned} & 2Jc_v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right] \\ & \qquad \qquad \qquad = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{X_x + Y_y + Z_z}{\mu} \right) \\ & + 2 \left(X_x \frac{\partial u}{\partial x} + X_y \frac{\partial u}{\partial y} + X_z \frac{\partial u}{\partial z} + Y_x \frac{\partial v}{\partial x} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Y_z \frac{\partial v}{\partial z} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + Z_x \frac{\partial w}{\partial x} + Z_y \frac{\partial w}{\partial y} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z} \right), \end{aligned} \right.$$

worin das erste Glied auf der rechten Seite gleich

$$3\mu \frac{d \frac{p}{\mu}}{dt}$$

sein soll. Setzen wir

$$(51) \left\{ \begin{aligned} & X_x \frac{\partial u}{\partial x} + X_y \frac{\partial u}{\partial y} + X_z \frac{\partial u}{\partial z} + Y_x \frac{\partial v}{\partial x} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Y_z \frac{\partial v}{\partial z} \\ & \qquad \qquad \qquad + Z_x \frac{\partial w}{\partial x} + Z_y \frac{\partial w}{\partial y} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z} = N, \end{aligned} \right.$$

so wird

$$(50_2) \quad 3\mu \frac{d \frac{p}{\mu}}{dt} + 2N = 2Jc_v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right],$$

die thermodynamische Gleichung der Maxwellschen Theorie in dieser Näherung, und man hat

$$(48_2) \left\{ \begin{aligned} & X_x = p - \frac{1}{3b\mu} \\ & \left[\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{X_x - p}{\mu} \right) - \frac{2}{3}N + 2 \left(X_x \frac{\partial u}{\partial x} + X_y \frac{\partial u}{\partial y} + X_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

und entsprechend Y_v , Z_v . Hier ist freilich nur noch $\frac{1}{3}b$ als Koeffizient vertreten. Aber einerseits enthalten die X_v usf. zwei Koeffizienten (im Gegensatz zur üblichen Theorie, wo die X_v usf. nur einen Koeffizienten haben und X_x usf. deren zwei), und andererseits bleibt noch die Gleichung (50₂) mit dem zweiten Koeffizienten.

Wir nehmen nun das frühere Problem auf und haben

$$(52_1) \quad \begin{cases} X_x = p - \frac{1}{3b\mu} \left(\mu u \frac{\partial X_x/\mu}{\partial x} - \frac{2}{3} Jc_v \frac{\partial \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}}{\partial x} + 2 X_x \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ Y_y = p - \frac{1}{3b\mu} \left(\mu u \frac{\partial Y_y/\mu}{\partial x} - \frac{2}{3} Jc_v \frac{\partial \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}}{\partial x} \right), \\ Z_z = p - \frac{1}{3b\mu} \left(\mu u \frac{\partial Z_z/\mu}{\partial x} - \frac{2}{3} Jc_v \frac{\partial \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}}{\partial x} \right), \\ X_y = Y_x = -\frac{1}{3b\mu} \left(\mu u \frac{\partial X_y/\mu}{\partial x} + X_y \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ Y_z = Z_y = -\frac{1}{3b\mu} \mu u \frac{\partial Y_z/\mu}{\partial x}, \\ Z_x = X_z = -\frac{1}{3b\mu} \left(\mu u \frac{\partial Z_x/\mu}{\partial x} + Z_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{cases}$$

und zugleich nach (51) und (52₂)

$$(52_2) \quad 3\mu u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\mu} \right) + 2 X_x \frac{\partial u}{\partial x} - 2 Jc_v \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) = 0$$

oder für ideale Gase

$$(52_3) \quad \frac{3R}{m} \mu u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + 2 X_x \frac{\partial u}{\partial x} = 2 Jc_v \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right).$$

Aus (48₂) folgt dann noch

$$(52'_1) \quad \begin{cases} X_x = p - \frac{1}{3b\mu} \left[\mu u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{X_x - p}{\mu} \right) + \frac{4}{3} X_x \frac{\partial u}{\partial x} \right], \\ Y_y = p - \frac{1}{3b\mu} \left[\mu u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Y_y - p}{\mu} \right) - \frac{2}{3} X_x \frac{\partial u}{\partial x} \right], \\ Z_z = p - \frac{1}{3b\mu} \left[\mu u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Z_z - p}{\mu} \right) - \frac{2}{3} X_x \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten nun mit $\mu u = c$

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{c}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3bc} \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial}{\partial x} u (X_x - p) + \frac{4}{3} X_x \frac{\partial u}{\partial x} u \right], \\ 0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2 X_y), \quad 0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2 X_z), \\ 3 \frac{\partial(pu)}{\partial x} + 2 X_x \frac{\partial u}{\partial x} = 2 J c_v \frac{m}{Rc} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial(pu)}{\partial x} \right) \\ \quad = J c_v \frac{m^2}{R^2 c^2} \lambda' \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p^2 u^2). \end{cases}$$

Die zweite und dritte Gleichung erfüllen wir mit $X_y = X_z = 0$. Sodann ist aus Symmetriegründen $Y_y = Z_z$, also

$$(54) \quad Y_y = Z_z = \frac{1}{2}(3p - X_x),$$

wodurch die zweite und dritte Gleichung unter (52₂) identisch erfüllt sind. Es bleiben also fünf Gleichungen mit fünf zu bestimmenden Größen X_x , Y_y , p , u , θ , und eine überschüssige Bedingung ist hier nicht vorhanden. Deshalb kann in der Maxwell'schen Theorie eine variable Lösung auch bestehen, wenn λ der Temperatur proportional angesetzt wird, was, wie wir sahen, in der üblichen Theorie nicht möglich ist.

Wir haben nun nach der ersten Gleichung unter (53)

$$(55) \quad C + cu = -p + \frac{1}{3bc} \left(u \frac{\partial}{\partial x} u (X_x - p) + \frac{4}{3} X_x \frac{\partial u}{\partial x} u \right),$$

also

$$(56) \quad X_x = C + cu,$$

wo C eine Konstante, und nach der letzten Gleichung von (53) nunmehr

$$(57) \quad 3pu + cu^2 + 2Cu = C' + 2Jc_v \frac{m}{Rc} \lambda \frac{\partial pu}{\partial x}$$

und zugleich ist nach (55) und (56)

$$(58) \quad \begin{cases} C + cu = -p + \frac{1}{3bc} \\ \left(u \frac{\partial}{\partial x} u (C + cu - p) + \frac{4}{3} (C + cu) \frac{\partial u}{\partial x} u \right). \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen dienen zur Bestimmung von p und u . Leicht überzeugt man sich, daß Potenzreihen nach x ausreichen, selbst wenn man λ variabel gleich

$$\lambda' \frac{m}{R} p u$$

ansetzt. Vor allem aber sieht man auch hier, daß auch die Maxwell'sche Theorie zwei Reibungskoeffizienten enthält:

$$\frac{1}{3} \eta \quad \text{und} \quad \frac{2}{3} J c \frac{m}{R c} \lambda'.$$

Setzt man im Sinne der Maxwell'schen Theorie nach (42₁)

$$(42_2) \quad \frac{1}{3} \eta = \frac{m}{R} \varrho$$

und im Sinne der kinetischen Theorie $\lambda' = n \varrho$, wie früher, so ist also der zweite Reibungskoeffizient nunmehr

$$\varrho' = \frac{2}{3} \frac{1}{k-1} n \varrho$$

und entsprechend

$$(III) \quad \eta' = \frac{2}{3} \frac{1}{k-1} n \eta.$$

Auch hier also ist der zweite Reibungskoeffizient bestimmt durch n und k , wie in der Formel (I). Daß die Formeln selbst nicht übereinstimmen, darf angesichts so ganz verschiedener Theorien nicht wundernehmen. Die Formel (III) führt noch viel weiter ab von dem üblichen Ansatz als die Formel (I); nach ihr wächst η'/η mit steigender Atomzahl ins Unendliche, und selbst für einatomige Gase ist $\eta' = n \eta$ also mit dem Maxwell'schen Wert von n gleich $5/3 \eta$ statt $1/3 \eta$!

Hiernach, glaube ich, wird man, bei Gasen wenigstens, dem zweiten Reibungskoeffizienten doch eine größere Aufmerksamkeit zuwenden müssen. Die zweckmäßigsten Versuche wären wohl die mit Schwingungen, etwa in der Weise, wie sie H. Vogel¹⁾ angelegt hat. Dabei wird man selbstverständlich die Formeln mit η' als selbständiger Größe zu rechnen haben. Vielleicht lassen sich Vogels schon ausgeführte Versuche unmittelbar anwenden, wenn man nur die Berechnungsformeln im angegebenen Sinne ändert.

Die Maxwell'sche Theorie gibt also immer zwei Reibungskoeffizienten, ohne die Beziehung $\eta' = 1/3 \eta$, und dabei doch unter allen Umständen $X_x + Y_y + Z_z = 3 p$.

1) Ann. d. Phys. 43. p. 1235ff. 1914.

Will man in der üblichen Theorie die Beziehung $\eta' = \frac{1}{3}\eta$, die also thermodynamisch nicht zulässig ist, fallen lassen, ohne die Beziehung $X_x + Y_y + Z_z = 3p$ zu verlieren, so muß man für die Druckkomponenten andere Ansätze machen. Vielleicht ist folgendes System brauchbar, das so aufgestellt ist, daß es sich von dem üblichen möglichst wenig entfernt.

$$X_x = p + \eta_1 x_x + \eta_3 y_y + \eta_2 z_z,$$

$$Y_y = p + \eta_2 x_x + \eta_1 y_y + \eta_3 z_z,$$

$$Z_z = p + \eta_3 x_x + \eta_2 y_y + \eta_1 z_z,$$

$$X_y = -(2\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)x_y + (\eta_2 - \eta_3)(z_y - z_x) = Y_x,$$

$$Y_z = -(2\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)y_z + (\eta_2 - \eta_3)(x_z - x_y) = Z_y,$$

$$Z_x = -(2\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)z_x + (\eta_2 - \eta_3)(y_x - y_z) = X_z.$$

Die x_x usf. haben die bekannte Bedeutung nach G. Kirchhoff. Man nimmt dann

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

Die Ansätze für X_y usf. habe ich nur geraten, da hier eine Berechnung aus einer Koordinatentransformation nicht angängig scheint. Es ist möglich, daß sie nicht zutreffend sind. Doch gehe ich hierauf nicht ein. Es betrifft auch das Voraufgehende nicht.

(Eingegangen 1. Juli 1916.)

**4. Versuch einer Anwendung der Quantenlehre
auf die Theorie des lichtelektrischen Effekts und
der β -Strahlung radioaktiver Substanzen;
von Paul S. Epstein.**

§ 1. *Einleitung.* — Die von N. Bohr¹⁾ begründete Anwendung der Quantenlehre auf die Atomistik hat in der kurzen Zeit ihres Bestehens bereits zu einer Reihe bemerkenswerter Erfolge geführt. Schon die von Bohr durch Anwendung eines Quantenansatzes in einer einzigen Koordinate gemachte Auswahl von „statischen“ Kreisbahnen brachte die Erklärung einiger spektraler Linienserien; und die überraschende experimentelle Bestätigung einer aus der Mitbewegung des Kerns theoretisch geforderten kleinen Verschiebung zwischen H- und He-Linien²⁾, sowie der für das Wasserstoffmolekül berechneten Dispersion³⁾ zeigte, daß es sich hier nicht um eine oberflächliche Analogie handelt, sondern daß das Bohrsche Modell der Wirklichkeit weitgehend entspricht. Neue Wege wurden der Atomistik durch die von Sommerfeld⁴⁾ und Planck⁵⁾ ausgeführte Erweiterung der Quantenansätze auf mehrere Freiheitsgrade eröffnet. Durch geeignete Modifikation dieser Ansätze hat Sommerfeld⁶⁾ eine Theorie der Wasserstoffdoubletts und der Röntgenspektren, K. Schwarzschild⁷⁾ und der Verfasser⁸⁾ eine Theorie des Starkeffekts gegeben. In beiden Fällen ist die Übereinstimmung mit der Erfahrung vorzüglich.

1) N. Bohr, Phil. Mag. 26. p. 1, 476, 857. 1913.

2) N. Bohr, Phil. Mag. 27. p. 506. 1914.

3) P. Debye, Münchener Ber. p. 1. 1915; A. Sommerfeld, Elster u. Geitel-Festschrift, p. 549, Braunschweig 1915.

4) A. Sommerfeld, Münchener Ber. p. 425. 1915.

5) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 17. p. 407, 438. 1915; Ann. d. Phys. 50. p. 385. 1916.

6) A. Sommerfeld, Münchener Ber. p. 459. 1915.

7) K. Schwarzschild, Berliner Ber. p. 548. 1916.

8) P. S. Epstein, Physik. Zeitschr. 17. p. 148. 1916.

In der erwähnten Arbeit setzt Sommerfeld voraus, daß sich das Elektron in einer *Ellipse* um den Atomkern bewegt, und fragt nach den möglichen (d. h. mit den Quantenansätzen verträglichen) Flächenkonstanten und Exzentrizitäten dieser Ellipsen. Den Quantenbedingungen gibt er dabei die folgende Form

$$(1) \quad \iint dp_{\varphi} d\varphi = nh, \quad \iint dp_r dr = n'h.$$

Es bedeuten hier (r, φ) Polarkoordinaten in der Ellipsenebene mit dem Kern als Nullpunkt, p_r, p_{φ} die bzw. Impulse des Elektrons, h das Plancksche Wirkungsquantum, n und n' ganze Zahlen. Es ergibt sich, daß zu jeder vorgegebenen Kombination der Zahlen n, n' eine statische Ellipse gehört, so daß eine doppelt unendliche Schar von Ellipsenbahnen möglich ist, welche als Grenzfall ($n' = \infty$) auch ∞^1 Parabeln enthält. Berücksichtigt man die relativistische Veränderlichkeit der Elektronenmasse, so erhalten die Ellipsen eine Präzessionsbewegung; dadurch sind für die Strahlung gegenüber den Bohrschen Kreisbewegungen Abweichungen bedingt, welche mit der Erfahrung vollkommen übereinstimmen.

Der Kern der vorliegenden Arbeit ist nun die Frage: *Gibt es außer diesen statischen Ellipsen auch statische Hyperbeln?* Bekanntlich beschreibt ein gravitierender Körper um ein Newtonsches Anziehungszentrum eine Hyperbelbahn, wenn er schon im Unendlichen (relativ zum Zentrum) eine radiale Bewegungsgröße (\tilde{p}_r) besitzt. Die Analogie zu den elliptischen Bahnen legt die Vermutung nahe, daß auch die möglichen Hyperbeln quantenhafte verteilt sind, und es fragt sich, wie die Quantenbedingungen abzuändern sind, um diese „statischen“ Bahnen zu erhalten. Ein Elektron, welches auf eine solche Bahn gerät, wird auf ihr ins Unendliche schießen und als lichtelektrischer Kathodenstrahl oder als β -Strahl in Erscheinung treten.

Im folgenden (§§ 2, 3) wird auf Grund der Gesichtspunkte, die für den Verfasser bei Behandlung des Starkeffekts maßgebend waren, eine Auswahl von hyperbolischen Bahnen getroffen und der Vergleich dieser Theorie mit der Erfahrung durchgeführt. Es sei von vornherein bemerkt, daß in einem weiter unten (§ 3) hervorzuhebenden Punkte eine willkürliche Annahme gemacht wird, die uns allerdings die einfachste zu

sein scheint. In bezug auf die Erklärung der β -Strahlen scheint die Theorie noch unvollständig zu sein. Immerhin aber ergeben sich einige bemerkenswerte Übereinstimmungen mit der Erfahrung, ferner sind einige Folgerungen, die sich auf den lichtelektrischen Effekt beziehen, experimentell prüfbar, wodurch eine Publikation dieser Überlegungen gerechtfertigt erscheint.

§ 2. *Die relativistische Hyperbelbewegung.* — Da wir es in den Anwendungen mit hohen Geschwindigkeiten zu tun haben werden (vgl. § 5), müssen wir das Problem auf relativistischer Grundlage behandeln. Die Berücksichtigung der Relativitätstheorie in der Keplerbewegung ist mehrfach ausgeführt worden, zum letztenmal wohl in der erwähnten Arbeit von Sommerfeld. Da wir jedoch für unsere Zwecke die Formeln in etwas anderer Form brauchen, ist es am einfachsten, sie nach einer andern, für uns bequemeren Methode abzuleiten.

Wir betrachten ein Elektron von der Ladung $-e$ und der Ruhmasse m , welches um einen festen Kern von der Ladung $+E = \kappa e$ kreist. Der relativistische Ausdruck für die Gesamtenergie ist dann

$$(2) \quad A = m c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right] - \frac{e E}{r},$$

wo der erste Term die kinetische Energie, der zweite die potentielle darstellt. Dabei bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit, $\beta = v/c$ das Verhältnis der Geschwindigkeit des Elektrons zur Lichtgeschwindigkeit. Wir führen noch die Bezeichnung $\sigma = 1/r$ ein und deuten durch einen Punkt die Ableitung nach der Zeit (t) an. Dann gibt (2) nach β^2 aufgelöst

$$(3) \quad \beta^2 = \frac{1}{c^2} (r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) = \frac{\left(\frac{e E \sigma + A}{m c^2} + 1 \right)^2 - 1}{\left(\frac{e E \sigma + A}{m c^2} + 1 \right)^2}.$$

Jetzt ersetzen wir die Geschwindigkeiten durch die zugehörigen Impulse, welche mit ihnen durch die Relationen

$$(4) \quad p_{\varphi} = \frac{m r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_r = \frac{m \dot{r}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

verknüpft sind, woher nach (2)

$$(5) \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{m r^2} \cdot \frac{p_{\varphi}}{\frac{e E \sigma + A}{m c^2} + 1}, \quad \dot{r} = \frac{1}{m} \cdot \frac{p_r}{\frac{e E \sigma + A}{m c^2} + 1}.$$

Es folgt

$$\sigma^2 p_\varphi^2 + p_r^2 = \left(\frac{e E \sigma}{c}\right)^2 + 2 m e E \sigma \left(1 + \frac{A}{m c^2}\right) + m A \left(2 + \frac{A}{m c^2}\right),$$

oder mit den Abkürzungen

$$(6) \quad p_0 = \frac{e E}{c}, \quad C = m e E \left(1 + \frac{A}{m c^2}\right), \quad D = m A \left(2 + \frac{A}{m c^2}\right),$$

$$\sigma^2 p_\varphi^2 + p_r^2 = p_0^2 \sigma^2 + 2 C \sigma + D.$$

Wir führen die Jacobische Wirkungsfunction ein

$$(7) \quad W = \int p_\varphi d\varphi + \int p_r dr = \int p_\varphi d\varphi - \int p_r \cdot \frac{d\sigma}{\sigma^2},$$

woher

$$(8) \quad p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}; \quad p_r = \frac{\partial W}{\partial r} = -\sigma^2 \frac{dW}{d\sigma},$$

und

$$(9) \quad \sigma^2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + \sigma^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \sigma} \right)^2 \right] = p_0^2 \sigma^2 + 2 C \sigma + D.$$

Das Integral dieser Gleichung

$$(10) \quad W = W(\sigma, \varphi, A, p),$$

wo A und p Konstanten sind, ist uns einerseits für die Aufstellung der Quantenbedingungen nach (1) nützlich; andererseits liefert es nach einem bekannten Satz von Jacobi¹⁾ sofort die Bewegungsgleichungen des Elektrons in der Form

$$(11) \quad \frac{\partial W}{\partial p} = \varphi_0, \quad \frac{\partial W}{\partial A} = t - t_0,$$

wobei φ_0 und t_0 zwei neue Konstanten sind.

Gleichung (9) läßt sich sehr einfach durch den Ansatz integrieren (Separation der Variabeln)

$$(12) \quad W = p \varphi - W'(\sigma),$$

woher nach (9)

$$\sigma^2 \left[p^2 + \sigma^2 \left(\frac{dW'}{d\sigma} \right)^2 \right] = p_0^2 \sigma^2 + 2 C \sigma + D,$$

$$(13) \quad \frac{dW'}{d\sigma} = \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{D + 2 C \sigma - (p^2 - p_0^2) \sigma^2}$$

und nach (12)

$$(14) \quad W = p \varphi - \int \frac{d\sigma}{\sigma^2} \sqrt{D + 2 C \sigma - (p^2 - p_0^2) \sigma^2}.$$

1) C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. Herausgegeben von A. Clebsch. p. 157. Berlin 1884.

Dies ist der explizite Ausdruck der Wirkungsfunktion, aus welchem wir nach (11) durch Differentiation die Bewegungsgleichungen des Elektrons erhalten. Von diesen zwei Gleichungen interessiert uns nur die erste, welche die geometrische Form der Bahn gibt. Der durch die zweite gegebene zeitliche Ablauf der Erscheinung ist für unsere späteren Anwendungen ohne Belang.

$$(15) \quad \varphi - \varphi_0 + p \int \frac{d\sigma}{\sqrt{D + 2C\sigma - (p^2 - p_0^2)\sigma^2}} = 0.$$

Wir wollen noch durch Einführung der neuen Variablen v und ψ

$$(16) \quad v = \frac{p^2 - p_0^2}{\sqrt{C^2 + D(p^2 - p_0^2)}} \left(\sigma - \frac{C}{p^2 - p_0^2} \right) = \cos \psi$$

die Ausdrücke (14) und (15) vereinfachen, die sich dann so schreiben:

$$(17) \quad W = p\varphi - \sqrt{p^2 - p_0^2} \int \sqrt{1 - v^2} \frac{dv}{(v + M)^2},$$

$$(18) \quad - \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma(\varphi - \varphi_0),$$

wo

$$(19) \quad \begin{cases} M = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D(p^2 - p_0^2)}}, \\ \gamma = \frac{\sqrt{p^2 - p_0^2}}{p}. \end{cases}$$

Gleichung (18) ergibt die Bahn des Elektrons in der Form

$$(20) \quad v = \cos \gamma(\varphi - \varphi_0) = \cos \psi.$$

Wenn wir an Stelle von v wieder den Ausdruck (16) einsetzen, überzeugen wir uns, daß diese Gleichung für *negative* Werte der Konstanten A genau die Sommerfeldschen präzessierenden Ellipsen darstellt. Bei positivem A dagegen ergibt sie in den Koordinaten $r, \gamma\varphi$ eine Hyperbel, in den Koordinaten des physikalischen Raumes r, φ eine Hyperbel mit Präzessionsbewegung, welche letztere genau durch denselben Faktor γ dargestellt wird wie im Sommerfeldschen Fall.

Das Perihel dieser Hyperbel liegt bei

$$v_1 = \gamma(\varphi - \varphi_0) = 0, \quad v_1 = 1, \quad \sigma_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{C + \sqrt{C^2 + D(p^2 - p_0^2)}}{p^2 - p_0^2},$$

r nimmt dann mit dem Winkel ständig zu, bis es bei

$$\bar{v} = \gamma(\varphi - \varphi_0) = \pi - \arccos M, \quad v = -M, \quad \sigma = \frac{1}{r} = 0$$

unendlich wird. Bei weiterem Zunehmen des Winkels erhalten wir den zweiten Ast der Hyperbel am bequemsten, wenn wir φ_0 und r eine andere Bedeutung beilegen, nämlich φ jetzt von der negativen φ_0 -Richtung ab zählen und r gleichfalls negativ werden lassen. Unter dieser Festsetzung schließen sich die Werte der Variablen $v = \gamma(\varphi - \varphi_0)$ und r für den zweiten Ast stetig an, was für unsere spätere Integration von Vorteil ist. r wird also bei weiterem Wachsen von v negativ und nimmt an Absolutwert ab, bis bei

$$v_2 = \gamma(\varphi - \varphi_0) = \pi, \quad v_2 = -1, \quad \sigma_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{C - \sqrt{C^2 + D(p^2 - p_0^2)}}{p^2 - p_0^2}$$

das Perihel des zweiten Astes erreicht wird. Von hier ab bis $v = \gamma(\varphi - \varphi_0) = 2\pi$ werden dieselben Werte von v und r symmetrisch rückwärts durchlaufen.

Demgemäß ist die Konstante M

$$(21) \quad M = -\cos \bar{v} = -\frac{1}{\varepsilon},$$

wo \bar{v} die Bedeutung des Asymptotenwinkels hat, welcher bekanntlich in der angegebenen Weise mit der Exzentrizität ε der Hyperbel zusammenhängt. Den Ausdruck (17) für W können wir jetzt mit Verfügung über die additive Konstante so schreiben:

$$(22) \quad W = p\varphi - \sqrt{p^2 - p_0^2} \int_0^v \sin v \frac{d \cos v}{(\cos v - \cos \bar{v})^2}.$$

§ 3. Die Quantenbedingungen. Berechnung der Bahnenergie. — Wir führen in der Quantenbedingung (1) die Integration nach dp_φ bzw. dp_r aus:

$$(23) \quad \int (p_\varphi - \bar{p}_\varphi) d\varphi = n\hbar, \quad \int (p_r - \bar{p}_r) dr = n'\hbar.$$

Es entstehen jetzt für uns zwei Fragen: Erstens, über welchen Bereich ist die Integration nach $d\varphi$ und dr auszudehnen;

zweitens, wie ist über die Anfangswerte \bar{p}_φ und \bar{p}_r zu verfügen? Die Antwort auf die erste Frage wird durch allgemeine Gesichtspunkte gegeben, welche ich an anderer Stelle¹⁾ für die Quantelung von Bewegungen, die sich durch Separation der Variablen integrieren lassen, aufgestellt habe. Der geometrische Sinn der dort zum Teil analytisch eingekleideten Prinzipien ist bei drei oder weniger Freiheitsgraden der folgende: Die erwähnte Klasse von Bewegungen hat die Eigenschaft, daß in ihnen die Bahnkurve einen dreidimensionalen (bzw. zweidimensionalen) Bereich B überall dicht erfüllt. Dieses Gebiet B ist im allgemeinen durch drei Flächenpaare (bzw. zwei Kurvenpaare) begrenzt und variiert mit den Anfangswerten der Bewegung: für alle möglichen Anfangswerte bilden die jeweiligen Grenzflächen drei Flächenscharen, welche uns die für die Quantelung berechtigten Koordinaten definieren. Die Integration der Quantenbedingungen ist (zweimal) über den ganzen Bereich B (für ein vorgegebenes System von Anfangswerten) zu erstrecken.

Auch die relativistische Keplerbewegung gehört zu dieser Klasse. Gehen wir zunächst auf den Fall der Ellipse ein ($A < 0$), so erfüllt die Bahnkurve infolge der Präzession einen Bereich B der Ebene (r, φ) zwischen zwei konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt von den Radien r_1 (Abstand des Perihels) und r_2 (Abstand des Aphels). Und zwar wird dieser Bereich doppelt überdeckt, nämlich einmal während der Bewegung des Elektrons vom Perihel zum Aphel, das zweite Mal während der rückwärtigen Bewegung vom Aphel zum Perihel. Diesem Umstand kann man dadurch Rechnung tragen, daß man die folgende zweiblättrige Riemannsche Fläche konstruiert: Man denke sich das Ringgebiet zwischen den konzentrischen Kreisen $r = r_1$ und $r = r_2$ in zwei aufeinandergelegten Exemplaren vorhanden, welche längs der beiden Grenzkreise miteinander verbunden sind. Es entsteht ein Gebilde, das sich zu einer Toroidfläche aufblasen läßt. Wir lassen nun die Bahnkurve von r_1 bis r_2 im ersten Blatt verlaufen, rückwärts von r_2 bis r_1 im zweiten Blatt.

Je nach dem Wert der Konstanten der Bewegung (A und p) haben die Verzweigungskreise $r = r_1$ und $r = r_2$ alle möglichen Lagen und bilden eine Schar von konzentrischen Kreisen.

1) P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 50. p. 489. 1916.

Daraus folgt nach unserer Regel, daß die eine der für die Quantelung berechtigten Koordinaten die Entfernung vom Kern r ist, und durch die konstruierte zweiblättrige Riemannsche Fläche haben wir es anschaulich gemacht, daß das Quantenintegral von r_1 bis r_2 (im ersten Blatt) und wieder zurück von r_2 bis r_1 (im zweiten Blatt) zu erstrecken ist. Mit anderen Worten, man muß *zweimal* von r_1 bis r_2 integrieren. Der von der Bahnkurve erfüllte Bereich wird nur von einem einzigen Paar von Kurven begrenzt, daher ist in diesem Fall keine zweite Schar von Koordinatenebenen unmittelbar durch die Bewegung ausgezeichnet. Es ist jedoch durchaus nicht willkürlich, wenn wir als zweite Koordinate für die Quantelung den Winkel φ benutzen, denn die Stäckelsche Theorie¹⁾, deren Resultate wir im Obigen benutzt haben, setzt ein *orthogonales* Koordinatensystem voraus. In φ ist die Integration naturgemäß von 0 bis 2π zu erstrecken.²⁾

Läßt man die Energiekonstante A allmählich abnehmen, so rückt der äußere Verzweigungskreis $r = r_2$ immer weiter vom Nullpunkt weg und ist bei $A = 0$ (Parabelbahn) bereits im Unendlichen. Für positive Werte von A ist die Bahn hyperbolisch, sie besteht aus zwei Ästen, und ein Teil der Ebene wird von ihr vierfach überdeckt. Der Bereich B bildet jetzt dem Obigen entsprechend eine *vierblättrige* Riemannsche Fläche: Von einem ersten Verzweigungskreis $r = r_1$ ab erstrecken sich zwei Blätter ins Unendliche. Über diesen liegen von dem zweiten Verzweigungskreis $r = r_2$ ab noch zwei Blätter, welche im Unendlichen mit den beiden ersten zusammenhängen. Die Integration ist in φ wieder von 0 bis 2π zu erstrecken, in r dagegen *zweimal* von r_1 bis ∞ und von ∞ bis r_2 . Dies entspricht bei Einführung unserer Hilfsvariablen v einer zweimaligen Integration von 0 bis π .

Während sich also die Integrationsgrenzen eindeutig aus Prinzipien ergeben, die sich bereits in den Anwendungen auf

1) Vgl. z. B. C. L. Charlier, *Mechanik des Himmels* I, 2. Abschn. Leipzig 1902.

2) Unsere Wahl des Integrationsbereiches entspricht der Planckschen Forderung, daß derselbe mit dem gesamten Variabilitätsbereich der betreffenden Koordinate zusammenfallen muß. Auch Sommerfeld (l. c.) benutzt dieselben Integrationsgrenzen und gelangt zu numerischen Werten der Liniendoublets, welche mit der Erfahrung sehr gut übereinstimmen.

Röntgenspektren und Starkeffekt bewährt haben, liegt in der Verfügung über die Anfangswerte \bar{p}_ϕ , \bar{p}_r , zu der wir jetzt übergehen eine gewisse Willkür. Bis jetzt wurden sie in allen Anwendungen gleich Null gesetzt, und wir wollen dies in bezug auf die Größe \bar{p}_ϕ übernehmen. Dagegen können wir nicht \bar{p}_r gleich Null setzen, ohne auf die ganze Theorie zu verzichten, denn dann würde das zweite Integral unendlich werden. Die Abhängigkeit des Impulses p_r von der Koordinate r wird uns nämlich nach (8) und (13) durch die Beziehung

$$(14') \quad p_r = \pm \sqrt{D + 2c\sigma - (p^2 - p_0^2)\sigma^2}$$

gegeben, die graphisch durch die beiden Figuren 1 und 2 veranschaulicht wird.

Fig. 1 bezieht sich auf den Fall $A < 0$ (Ellipse). Da die Kurve geschlossen ist, ist es vollkommen gleichgültig, welchen Wert man \bar{p}_r beilegt, sofern dieser nur konstant ist. In jedem Fall wird das Integral

$$(23') \quad n'h = \int (p_r - \bar{p}_r) dr$$

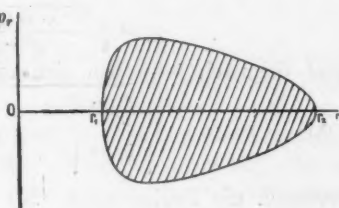


Fig. 1.

durch den Flächeninhalt der Kurve dargestellt, und ausgezeichnete Werte des Impulses sind nicht vorhanden.

Anders im Fall der Fig. 2, die sich auf die Hyperbel bezieht ($A > 0$). Die Kurve besteht aus zwei Ästen, die sich beiderseits ins Unendliche erstrecken, indem sie sich zwei Geraden asymptotisch anschmiegen. Die Ordinaten dieser Geraden entsprechen also den Werten des Impulses im Unendlichen. Es liegt nahe für \bar{p}_r diese ausgezeichneten Werte des Impulses einzusetzen, denn nur unter dieser Annahme kann das Integral (23') endlich werden:

$$(24) \quad \bar{p}_r = \lim_{r \rightarrow \infty} p_r = \lim_{v \rightarrow \infty} p_r.$$

Graphisch wird dann das Integral (23') durch die in Fig. 2 schraffierte Fläche dargestellt, wobei die Teile dieser Fläche außerhalb der Asymptoten $p_r = \pm \bar{p}_r$ positiv, diejenigen innerhalb dieser Geraden negativ zu rechnen sind.

Man kann dies vielleicht so auffassen, daß derjenige Teil des Impulses p_r , welchen das Elektron aus dem Unendlichen mitbringt und welcher also gar nicht von der Wirkung des Kernes herrührt, bei der Quantelung abzuziehen ist.

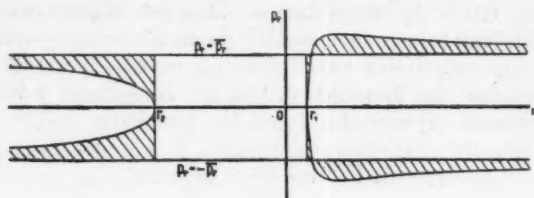


Fig. 2.

In unserer Bezeichnungsweise ist

$$p_r = \sqrt{\frac{C^2 + D(p^2 - p_0^2)}{p^2 - p_0^2}} \sin v,$$

und demnach schreiben sich unsere Festsetzungen

$$(25) \quad \begin{cases} \bar{p}_\varphi = 0, \\ \bar{p}_r = \sqrt{\frac{C^2 + D(p^2 - p_0^2)}{p^2 - p_0^2}} \sin \bar{v}, \end{cases}$$

wodurch die Bedingungen (23) die folgende Form erhalten:

$$(26) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} p \, d\varphi = n h, \\ -2 \sqrt{p^2 - p_0^2} \int_0^\pi \frac{\sin v - \sin \bar{v}}{(\cos v - \cos \bar{v})^2} d \cos v = n' h. \end{cases}$$

Das erste Integral liefert

$$(27) \quad p = \frac{n h}{2 \pi};$$

da p notwendig dasselbe Vorzeichen haben muß wie $d\varphi$, ist n eine wesentlich *positive* ganze Zahl. Das zweite Integral läßt sich leicht allgemein zwischen beliebigen Grenzen a und b ausführen:

$$(28) \quad \begin{cases} - \int_a^b \frac{\sin v - \sin \bar{v}}{(\cos v - \cos \bar{v})^2} d \cos v \\ = \left[-v + \cotg \bar{v} \log \frac{\sin \frac{\bar{v} - v}{2}}{\sin \frac{\bar{v} + v}{2}} + \frac{\sin v - \sin \bar{v}}{\cos v - \cos \bar{v}} \right]_a^b. \end{cases}$$

Den Hauptwert unseres Integrals erhalten wir, wenn wir den Anteil des ersten Astes von 0 bis in die Nähe der Unendlichkeitsstelle ($\bar{v} - \eta$) nehmen:

$$-\bar{v} + \cotg \bar{v} \cdot \log \frac{\sin \eta/2}{\sin(\bar{v} + \eta/2)} + \frac{\sin(\bar{v} - \eta) - \sin \bar{v}}{\cos(\bar{v} - \eta) - \cos \bar{v}} + \frac{\sin \bar{v}}{1 - \cos \bar{v}},$$

denjenigen des zweiten von $\bar{v} + \eta$ bis π

$$-\pi + \bar{v} + \eta - \cotg \bar{v} \cdot \log \frac{\sin \eta/2}{\sin(\bar{v} + \eta/2)} + \frac{\sin(\bar{v} + \eta) - \sin \bar{v}}{\cos(\bar{v} + \eta) - \cos \bar{v}} + \frac{\sin \bar{v}}{1 + \cos \bar{v}}.$$

Wir summieren und gehen zur Grenze $\eta = 0$ über, dabei liefern die beiden letzten Terme in jedem Ausdruck $1/\sin \bar{v}$, während sich die logarithmischen Glieder in der Summe wegheben. Es folgt

$$(29) \quad n' h = 2 \pi \sqrt{p^2 - p_0^2} \cdot \left[\frac{2}{\pi \sin \bar{v}} - 1 \right].$$

Während die Quanzentahl n wesentlich positiv sein muß, ist dies für n' nicht der Fall. Denn das zweite Integral (26) kann je nach dem Wert des Asymptotenwinkels \bar{v} größer oder kleiner als Null ausfallen. Eine notwendige Beschränkung, welcher die Zahl n' unterworfen ist, ist jedenfalls die, daß sie so gewählt werden muß, daß (29) nach $\sin \bar{v}$ aufgelöst einen Wert $|\sin \bar{v}| < 1$ ergibt. Man sieht ferner aus (29), daß für n der Wert Null auszuschließen ist, da $p = 0$ zu einer imaginären Zahl n' (und wie wir sehen werden auch zu einer imaginären Energie) führen würde.

Gleichung (29) kann nach (21) und (19) so geschrieben werden:

$$n' h + 2 \pi \sqrt{p^2 - p_0^2} = 4 \sqrt{\frac{C^2}{D} + p^2 - p_0^2},$$

und diese Beziehung liefert unter Berücksichtigung von (6) und (27) die Abhängigkeit der Energiekonstante A von den Quantenzahlen n und n' :

$$(30) \quad \frac{A^2}{m c^2} + 2 A = \frac{m c^2 \alpha^2 x^2}{R^2},$$

wo zur Abkürzung bezeichnet ist

$$(31) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{2 \pi p_0}{h} \cdot \frac{e}{E} = \frac{2 \pi e^2}{h c}, \\ x = \frac{E}{e}, \\ R^2 = \frac{\pi^2}{4} \left(n \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 x^2}{n^2}} + n' \right)^2 - n^2. \end{cases}$$

Mit dem Asymptotenwinkel \bar{v} und dem Grenzimpuls \bar{p}_r hängt die Konstante R auf die folgende Weise zusammen:

$$(31) \quad \begin{cases} R^2 = n^2 \left(\frac{1 - \frac{\alpha^2 x^2}{n^2}}{\sin^2 \bar{v}} - 1 \right), \\ \bar{p}_r = \frac{m c \alpha x}{R}. \end{cases}$$

Nach A aufgelöst, gibt Gleichung (30)

$$(32) \quad A = m c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 x^2}{R^2}} - 1 \right],$$

die zweite Lösung hat keine physikalische Bedeutung und entspringt dem Umstand, daß im Anfang der Rechnung die Energiegleichung (2) quadriert wurde.

Jetzt können wir auch die Beschränkung, welcher die Auswahl der Zahlen n' zu unterwerfen ist, schärfer fassen. Es muß offenbar $R^2 > 0$ sein, da sonst die Energie negativ und unsere Bahnkurve überhaupt keine Hyperbel wäre. Man sieht, daß diese engere Bedingung die frühere notwendige ($\sin^2 \bar{v} < 1$) einschließt.

Bevor wir zu den Anwendungen der Schlußformel (32) übergehen, wollen wir noch die Gestalt der statischen Hyperbeln für den Fall diskutieren, daß man die relativistischen Glieder vernachlässigen kann. Die Formeln (29) und (32) reduzieren sich dann auf

$$(33) \quad \sin \bar{v} = \frac{2}{\pi} \frac{n}{n + n'},$$

$$(34) \quad A = \frac{2 \pi^2 m x^2 e^4}{h^2} \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} (n + n')^2 - n^2} = \frac{N_0 h x^2}{Z},$$

wo N_0 die Rydbergsche Konstante und Z eine Abkürzung ist.

$$(34') \quad \begin{cases} N_0 = \frac{2 \pi m e^4}{h^3}, \\ Z = \frac{\pi^2}{4} (n + n')^2 - n^2. \end{cases}$$

Andererseits ist nach unseren Überlegungen auf p. 820 und nach (6) die reelle Halbachse der Hyperbel

$$(35) \quad a = \frac{C}{D} = \frac{e^2 x}{2 A} = \frac{e^2}{2 N_0 h x} \left[\frac{\pi^2}{4} (n + n')^2 - n^2 \right].$$

Bei Hyperbeln von großer Energie weicht der Ausdruck $\frac{\pi n + n'}{2n}$ wenig von der Einheit ab, daher haben sie eine kleine Halbachse und einen so großen Asymptotenwinkel, daß sie sich einer Geraden nähern. Im Spezialfall $n' = 0$ ist $\sin \bar{\nu} = 2/\pi$ und der Asymptotenwinkel wird $2\bar{\nu} = 79^\circ 4' 48''$. Die Entfernung des Perihels vom Brennpunkt ist

$$(36) \begin{cases} a \cdot \left[\frac{1}{\cos \bar{\nu}} - 1 \right] \\ = a \frac{1}{\sqrt{Z}} \left[\frac{\pi}{2} (n + n') - \sqrt{Z} \right], \end{cases}$$

sie ist also bei ungefähr gleicher Energie um so größer, je größer die Summe $n + n'$ ist. Wir illustrieren die Form der dem Kern benachbarten Äste der vier Hyperbeln ($n = 3, n' = -1$), ($n = 1, n' = 0$), ($n = 2, n' = 0$) und ($n = 1, n' = 1$) durch eine Zeichnung (Fig. 3).



Fig. 3.

§ 4. Anwendung auf die lichtelektrischen Erscheinungen. —

Wir sind in den letzten Paragraphen von der Anschauung ausgegangen, daß außer den geschlossenen Bahnen eines Atoms, auf welchen ein Elektron nach Bohr in normaler Weise kreist, es noch andere Bahnen gibt, welche ins Unendliche reichen und für wasserstoffähnliche (aus einem Kern und einem Elektron bestehende) Atome hyperbolische Gestalt haben. Damit das Elektron von einer geschlossenen Bahn auf eine Hyperbel übergeht, muß man ihm Energie zuführen, und eines der Mittel dafür ist die Bestrahlung. Diese Auffassung des lichtelektrischen Effekts unterscheidet sich von der üblichen dadurch, daß die Frequenz des einfallenden Lichts die Elektronengeschwindigkeit nicht direkt bestimmt, sondern eine nur sekundäre auslösende Bedeutung hat (siehe unten); es sind vielmehr in jedem Atom nur gewisse diskrete Geschwindigkeiten möglich, die durch unsere Formel (32) gegeben werden.

Diese Geschwindigkeiten lassen sich naturgemäß nur dann angeben, wenn der Bau des Atoms genau bekannt ist. Dies trifft bis jetzt nur für das Wasserstoffatom zu, welchem auch unsere Theorie angepaßt ist; und es ist ein glücklicher

Umstand, daß Gehrke und Janicki¹⁾ an mit Wasserstoff beladenen Metallelektroden lichtelektrische Erscheinungen beobachtet und gemessen haben, welche sie mit überzeugenden Argumenten als photoelektrischen Effekt des Wasserstoffs deuten. Bei Wasserstoff ist die Kernladung $E = e$, also in unseren Formeln $z = 1$. Die relativistischen Glieder werden so klein, daß man den Ausdruck (34) für die Energie A benutzen kann. Die Geschwindigkeit, wie üblich in Volten ausgedrückt, erhalten wir, wenn wir A (in erg) durch e teilen und mit 300 multiplizieren

$$(37) \quad V = \frac{300}{e} A = 300 N_0 \frac{h}{e} \frac{1}{Z} \text{ Volt.}$$

Bekanntlich ist der numerische Wert der Rydbergschen Konstante $N_0 = 3,29 \cdot 10^{15}$; der Quotient h/e läßt sich aus der Konstante C des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes bestimmen, und zwar ergibt sich aus dem Wert

$$C = 1,4300 \text{ cm/Grad Cels.}$$

den Warburg und Müller²⁾ für den besten halten und der deshalb auch in Kohlrauschs *Leitfaden* übernommen wurde, $h/e = 1,3693 \cdot 10^{-17}$. Dieser Wert dürfte keinen größeren Fehler als 0,5 % enthalten. Man erhält hiernach für den Ausdruck von V den numerischen Faktor

$$(38) \quad V = \frac{13,52}{Z} \text{ Volt,}$$

was die folgenden diskreten Geschwindigkeiten der lichtelektrischen Elektronen liefert:

$n = 3$	1	2	1	3	2	} usw.
$n' = -1$	0	0	1	0	1	
$V = 15,55$	$9,20$	$2,30$	$1,52$	$1,05$	$0,76$ Volt	

Um uns ein Bild zu machen, unter welchen Umständen die verschiedenen Geschwindigkeiten zustande kommen, müssen wir uns wenigstens einige provisorische Vorstellungen über Lichtabsorption bilden. Über diesen Gegenstand findet man in der Literatur zwei verschiedene Anschauungen, von denen sich die eine auf Absorption ohne Auslösungen lichtelektrischer Elektronen, die andere auf Absorption mit einer solchen be-

1) E. Gehrke u. L. Janicki, Ann. d. Phys. 47. p. 679. 1915.

2) E. Warburg u. C. Müller, Ann. d. Phys. 40. p. 609. 1913; 48. p. 410. 1915.

zieht. Bohr¹⁾ äußert bereits in seiner ersten Abhandlung die Vermutung, daß es sich bei Absorption um die Umkehrung des von ihm angenommenen Emissionsvorganges handelt: genau dieselbe Frequenz, welche nach der Beziehung $h\nu = A_1 - A_2$ beim spontanen Übergang aus einer Kreisbahn in eine andere emittiert wird, kann rückwärts den Übergang des Elektrons aus der zweiten Bahn in die erste bewirken. Der Umstand, daß in einem leuchtenden Gas unter Wahrung des Kirchhoffschen Gesetzes genau dieselben Wellenlängen absorbiert und emittiert werden (Selbstumkehrung, Fraunhoferse Linien), verleiht dieser Vermutung eine nicht geringe Überzeugungskraft. Andererseits zeigen die Spektrogramme von Wagner²⁾, welche die Absorption von Röntgenstrahlen in verschiedenen Substanzen illustrieren, eine *Absorptionskante*. Von einer bestimmten Grenzwellenlänge λ_g ab, welche nach der Bohrschen Beziehung der Auslösung eines lichtelektrischen Elektrons von der Geschwindigkeit Null (im Unendlichen) entspricht, beobachtet man kontinuierliche Absorption. Dies wurde immer in der Weise gedeutet, daß alle Wellenlängen, die kürzer sind als λ_g , gleichfalls ein lichtelektrisches Elektron auslösen können. Weitere experimentelle Belege für diese Auffassung finden sich in einer Arbeit über die Absorption von Röntgenstrahlen von W. Kossel.³⁾

Auf diesen Tatsachen fußend, bilden wir uns die folgende Arbeitshypothese: Bestrahlung eines Atoms mit Licht von der Schwingungszahl ν kann den Übergang eines Elektrons aus einer geschlossenen (elliptischen) Bahn von der Energie A_e in eine andere geschlossene Bahn von der Energie A_e' ($A_e' > A_e$) bewirken, wenn

$$(39) \quad h\nu = A_e' - A_e;$$

sie kann den Übergang aus einer elliptischen Bahn (A_e) in eine hyperbolische von der Energie A_h bewirken, wenn

$$(40) \quad h\nu > A_h - A_e = h\nu_g.$$

Nach der üblichen Anschauung kommt der Überschuß von $h\nu$ über die gegen das Atomfeld geleistete Arbeit dem Elektron als kinetische Energie zugute. Dagegen liegt unserer

1) N. Bohr, Phil. Mag. 26. p. 1. 1913.

2) E. Wagner, Ann. d. Phys. 46. p. 868. 1915.

3) W. Kossel, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 16. p. 898, 953. 1914.

Hypothese die Auffassung zugrunde (die wir übrigens mit Sommerfeld und, wie es scheint, auch mit Bohr teilen), daß die Bohrsche Beziehung (39) lediglich eine „*Frequenzbedingung*“ ist, welche mit dem eigentlichen energetischen Vorgang nichts zu tun hat.

Gleichung (40) sagt aus, daß jede der auf p. 828 berechneten Geschwindigkeiten nur auftreten kann, wenn die einstrahlende Wellenlänge unterhalb einer bestimmten Grenze λ_0 liegt. Diese Grenzen berechnen sich zu den folgenden Werten:

$$\begin{array}{cccc} V = 15,55 \text{ Volt,} & 9,20 & 2,30 & 1,52 \\ \lambda_0 = 792,7 \text{ \AA,} & 1365,6 & 5350,4 & 8085,2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cccc} V = 15,55 \text{ Volt,} & 9,20 & 2,30 & 1,52 \\ \lambda_0 = 792,7 \text{ \AA,} & 1365,6 & 5350,4 & 8085,2 \end{array}} \right\} \text{ usw.}$$

In ihren Versuchen haben Gehrcke und Janicki (l.c.) die Quarzquecksilberlampe als Lichtquelle benutzt, deren Grenze bei etwa 2900 Å liegt. Die größte Geschwindigkeit, die unter diesen Umständen vom Standpunkt unserer Theorie möglich ist, ist 2,30 Volt.¹⁾ Beobachtet wurden die folgenden Aufladepotentiale (nach Zerstäubung der Metalle in reinem Wasserstoff):

Mittelwert von 24 Messungen an Platin:	2,30 Volt
„ „ 6 „ „ Gold:	2,25 „
„ „ 16 „ „ Zink:	2,29 „
„ „ 7 „ „ Kupfer:	2,28 „

Die Zuverlässigkeit dieser Zahlenwerte übersteigt nach Angabe der Verfasser nicht $\pm 0,1$ Volt, so daß die Übereinstimmung mit unserer Theorie eine sehr gute ist.

Die oben angegebenen Werte λ_0 entsprechen dem Übergang in die betreffende Hyperbel aus einer sehr entfernten Kreis- oder Ellipsenbahn (von der Energie $A_0 = 0$). In Wirklichkeit sind diese Bahnen um so weniger wahrscheinlich, je größer ihre (dem Vorzeichen nach negative) Energie ist, so daß bei Bestrahlung mit Wellenlängen, welche nur wenig kürzer sind als λ_0 , der lichtelektrische Effekt eine nahezu verschwindende Intensität haben muß. Läßt man die Wellenlänge des monochromatischen einfallenden Lichtes abnehmen,

1) Durch Kombination sehr großer Quantenzahlen n, n' wäre es vielleicht möglich, aus der Formel (38) Geschwindigkeiten zu erhalten, welche zwischen 2,30 Volt und 9,20 Volt liegen. Indessen würden solche Bahnen (vgl. Schluß von § 3) ihr Perihel in sehr großer Entfernung vom Kern haben, was ihre praktische Möglichkeit zweifelhaft macht.

so beeinflußt dies die Intensität aus zwei verschiedenen Gründen. Erstens erfolgt eine sprunghafte Zunahme derselben jedesmal, wenn λ über einen Wert rückt, welcher nach Ungleichung (40) das Auslösen eines Elektrons aus einem neuen, weiter innen liegenden Bohrschen Ring ermöglicht. Dies bedingt ein treppenförmiges Ansteigen der Intensitätskurve; bei den uns interessierenden Strahlen von der Geschwindigkeit 2,80 Volt liegen die Hauptgeschwindigkeitsstufen bei

$\lambda = 5053,6 \text{ \AA.}$	4988,6	4901,0	4777,9	4600,2	4332,9
$n = 10$	9	8	7	6	5
$\lambda = 3914,4 \text{ \AA.}$	3238,3	2168,4	778,8		
$n = 4$	3	2	1		

Hierbei bedeutet n die Ordnungszahl des innersten Bohrschen Ringes, welcher noch in Mitleidenschaft gezogen wird. Diesem Effekt überlagert sich ein zweiter: eine vorübergehende Steigerung der Intensität erfolgt nach Gleichung (39), wenn λ über eine Serienlinie des Wasserstoffs rückt. In diesem Falle werden nämlich Elektronen aus einem inneren Ring in einen äußeren befördert, und dies steigert die Zahl der „prädisponierten“ Elektronen, welche von dem eben besprochenen Effekt erfaßt werden können.¹⁾

Diese zwei Arten des Anwachsens der Intensität haben eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Verhalten des *normalen* und *selektiven* photoelektrischen Effekts von Pohl und Pringsheim²⁾; dabei bleibt allerdings unerklärt, warum das einfallende Licht für die Anregung der beiden Effekte verschieden polarisiert sein muß.

Es ist zu betonen, daß die obigen Erörterungen sich auf den Fall *freier* Atome beziehen. Aus der Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment scheint hervorzugehen, daß der okkludierte Wasserstoff diese Voraussetzung erfüllt. Da-

1) Herr K. Glitscher (Münchener Ber., im Erscheinen begriffen) hat es neuerdings plausibel gemacht, daß es sich bei dem Viellinienspektrum des Wasserstoffs um Übergänge aus den Bohr-Sommerfeldschen Ringen in ähnliche Bahnen eines noch unbekannten Systems von kleinerer Energie handelt. Bestätigt sich dies, so ist aus dem eben dargelegten Grunde ein Parallelismus zwischen Intensität des lichtelektrischen Effekts und Dichte der Linien im Viellinienspektrum zu erwarten.

2) R. Pohl u. P. Pringsheim, Die lichtelektrischen Erscheinungen. p. 13, 14. Braunschweig 1914.

gegen müßte man für die Auslösung lichtelektrischer Elektronen aus dem Verband fester und flüssiger Körper noch einen Energieverlust beim Durchdringen der Oberfläche in Rechnung setzen, genau wie dies in der Einsteinschen Formel geschehen ist. Noch in einer anderen Beziehung sind die Verhältnisse aus Wasserstoff für die Prüfung unserer Theorie günstig: Die verschiedenen Geschwindigkeitsstufen entsprechenden Grenzwellenlängen λ , liegen hier gerade in dem experimentell bequem zugänglichen Bereich ziemlich weit auseinander. Wäre dies nicht der Fall, wie sich z. B. aus unserer Formel (32) für verhältnismäßig große Kernladungen ergeben würde, so würde der Versuch ein ungefähr lineares Anwachsen des Potentials V mit der Wellenlänge feststellen, wie er auch durch die Einsteinsche Formel gegeben wird. Aus diesem Grunde kann man aus den Ergebnissen der schönen Messungen von Millikan¹⁾ keinen Widerspruch mit unserer Theorie konstruieren.

Zusammenfassend können wir sagen: Unsere Theorie, verbunden mit der durch die Beziehungen (39), (40) gegebenen Arbeitshypothese, ist mit den Versuchen insofern in Übereinstimmung, als sie bei den Versuchsbedingungen von Gehrke und Janicki den Wert 2,30 Volt für das Aufladepotential ergibt, welcher tatsächlich beobachtet wurde. Der experimentellen Prüfung sind die folgenden weiteren Folgerungen der Theorie zugänglich:

1. Das Aufladepotential (2,30 Volt) ist in ziemlich weiten Grenzen von der Wellenlänge des anregenden Lichtes unabhängig.

2. Bei Bestrahlung mit sehr viel kürzeren Wellenlängen treten höhere Aufladepotentiale (9,20 bzw. 13,55 Volt) auf.

3. Die Intensität des lichtelektrischen Effekts als Funktion der anregenden Wellenlänge läßt gewisse, oben eingehend geschilderte Regelmäßigkeiten erwarten.

Bei den Versuchen könnte allerdings eine Komplikation dadurch eintreten, daß sich dem lichtelektrischen Effekt am okkludierten Wasserstoff die Eigenstrahlung des Elektrodenmetalls überlagert.

§ 5. *Anwendung auf die β -Strahlen.* — Neuere Versuche über die magnetische Ablenkbarkeit der β -Strahler radio-

1) R. A. Millikan, Physik. Zeitschr. 17. p. 217. 1916.

aktiver Substanzen¹⁾ haben zu dem Ergebnis geführt, daß diese Stoffe im allgemeinen mehrere homogene Bündel von β -Strahlen aussenden. Bei einigen Präparaten ist die Zahl dieser Bündel überraschend groß. Auf einer photographischen Platte hinterlassen die durch ein Magnetfeld von der Feldstärke H auseinandergezogenen Bündel diskrete Linien, weshalb man von einem „magnetischen Spektrum der β -Strahlen“ spricht. Die Lage dieser Linien gestattet es, den Krümmungsradius ϱ der betreffenden Strahlen im Magnetfeld und die für jede Strahlenart konstante, für sie charakteristische Größe $H\varrho$ (Steifigkeit) zu bestimmen. Aus der Steifigkeit berechnet sich die Geschwindigkeit der β -Strahlen nach der Formel

$$(41) \quad \beta = \frac{v}{c} = \left[\left(\frac{mc}{H\varrho e} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2},$$

während sich die (kinetische) Energie jedes Elektrons nach (2) so darstellt:

$$(42) \quad A = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right].$$

In den Anwendungen der Quantentheorie auf Röntgenspektren²⁾ hat es sich gezeigt, daß man für die Berechnung der K - und L -Terme der Spektralformeln die Atome von hoher Kernladung als wasserstoffähnlich behandeln kann. Wir versuchen es, auch unsere Formel (32) so anzuwenden, als ob das System aus einem Kern und einem Elektron bestünde, ohne uns um die übrigen Elektronen zu kümmern. Auch die Frage, woher das β -Strahl-Elektron kommt, wird von unserer Theorie nicht umfaßt; nach der gut begründeten Meinung von Bohr kommt es aus dem Kern selbst und ist daher schon vom Kern losgelöst, wenn es auf unsere Hyperbelbahn gelangt.

1) O. v. Baeyer u. O. Hahn, *Physik. Zeitschr.* **11.** p. 488. 1910; O. v. Baeyer, O. Hahn u. L. Meitner, *Physik. Zeitschr.* **12.** p. 273. 1911; **12.** p. 378. 1911; **12.** p. 1099, 1911; **13.** p. 264. 1912; **14.** p. 321. 1913; **15.** p. 649. 1914; **16.** p. 6. 1915; J. Danysz, *C. R.* **153.** p. 339. 1911; *Le Radium* **9.** p. 1. 1911; **10.** p. 4. 1913; *Ann. de Chim. phys.* **30.** p. 241. 1913; J. Danysz et J. Götz, *Le Radium* **9.** p. 6. 1912; E. Rutherford and A. Robinson, *Phil. Mag.* **26.** p. 717. 1913. Ein zusammenfassender Bericht wurde von O. v. Baeyer (*Jahrb. der Radioaktiv. und Elektronik* **11.** p. 66. 1914) veröffentlicht.

2) A. Sommerfeld, l. c.

Aus diesem Grunde ist für α in unseren Formeln stets die Ordnungszahl des entstehenden Produkts zu setzen.

Der Vergleich von (32) und (42) gibt

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha x}{R}\right)^2},$$

woher

$$(43) \quad \beta = \left[\left(\frac{R}{\alpha x} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2},$$

und nach (41)

$$(44) \quad H\varrho = \frac{m c \alpha x}{e R}.$$

Da nicht alle Autoren die Werte von $H\varrho$ angeben, berechnen wir die Werte von β für alle Ordnungszahlen zwischen 92 (U) und 82 (Pb).¹⁾ Es zeigt sich, daß Formel (43) äußerst empfindlich auf kleine Änderungen der Konstanten α reagiert, deren Wert daher mit großer Sorgfalt zu bestimmen ist. Dabei wurde auf folgende Weise vorgegangen: da die Rydbergsche Konstante nach Bohr so lautet: $N_0 = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}$, so läßt sich α^2 nach (31) wie folgt schreiben:

$$(45) \quad \alpha^2 = \frac{2 N_0}{e^2} \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{e}{m}.$$

Für N_0 und h/e nehmen wir wieder die bereits in § 4 benutzten Werte ($3,29 \cdot 10^{-17}$ und $1,3693 \cdot 10^{17}$) an, für e/m gilt als bester Wert $5,310 \cdot 10^{17}$, der sich aus Zeemanneffektmessungen ergibt, c setzen wir gleich $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Dies führt zu dem Zahlenwert

$$(46) \quad \alpha^2 = 5,316 \cdot 10^{-5},$$

welcher allen nachstehenden Rechnungen zugrunde liegt.²⁾

Zunächst stellen wir in Tab. I die Gruppe von Geschwindigkeiten zusammen, welche sich aus (43) und (31) für $n = 1$, $n' = 0$ ergeben.

1) Sämtliche Daten über radioaktive Elemente sind dem Bericht über radioaktive Umwandlungen von K. Fajans (Physik. Zeitschr. 16. p. 456. 1915) entnommen.

2) Eine Veränderung dieser Zahl um $\pm 0,02$ zieht eine Änderung der Werte von β in der Tabelle I um $\pm 0,002$ (mit demselben Vorzeichen) nach sich.

Tabelle I.

Berechnet		Gemessen von				v. Baeyer, Hahn und Meitner (RaC)
		Danysz (RaB, C)	Rutherford und Robinson			
x	β	β Int.	RaB β Int.	RaC β Int.	β	
92	0,747	0,753 st.	0,751 1	0,750 4	0,74	
91	0,732	0,733 s.s.	0,731 4	—	0,69	
90	0,718	0,722 s.	0,719 3	—		
89	0,704	0,706 st.	0,700 1	—		
88	0,690	—	—	—		
87	0,677	0,682 s.s.	—	0,675 4		
86	0,664	0,660 s.	—	—	0,63	
85	0,652	—	0,656 3	—		
84	0,640	0,642 st.	0,635 1	0,648 6		
83	0,628	—		0,632 6		
82	0,616	—		—		

Intensitätsbezeichnungen:

Danysz, st. = stark, s. = schwach, s.s. = sehr schwach.

Ruth u. Rob., 1 — sehr stark, 7 — sehr schwach.

Es ist zu bemerken, daß wir in diese Tab. *sämtliche* von den angegebenen Autoren im Bereich $0,753 > \beta > 0,630$ gemessenen Geschwindigkeiten eingetragen haben, so daß unsere konstantenfreie Formel bei geeigneter Wahl von x wirklich alle beobachteten Geschwindigkeitsstufen wiedergibt. Dabei entsprechen die zu den stärksten Linien gehörenden Zahlen x notorisch starken β -Strahlern (Ordnungszahl der entstehenden Produkte: 92 — aus Brevium, 89 — Ra, 84 — RaB, 83 — RaC).¹⁾ Es wäre indessen noch verfrüht, daraus schließen zu wollen, daß diese Substanzen in den benutzten Präparaten wirklich vorhanden waren. Mehr Wert legen wir auf folgendes Zusammen treffen: Da es keine Ordnungszahlen über 92 gibt, und da die Elemente mit solchen unter (oder gleich) 82 inaktiv sind, müssen wir theoretisch erwarten, daß die β der Tab. I eine isolierte Gruppe darstellen und daß dieses Spektrum nach unten und oben abbricht. Dies trifft in der Tat für die untere Grenze zu, am RaB-Präparat wurden überhaupt keine β be-

1) Aus verschiedenen Gründen sind wir geneigt anzunehmen, daß die von Rutherford u. Robinson mit 0,635 angegebene Geschwindigkeit in Wirklichkeit eine Doppellinie ist, die zu den Werten $x = 84$ und $x = 83$ gehört.

obachtet, die unter 0,632 liegen; bei RaC folgen weitere Geschwindigkeiten erst nach einer größeren Lücke (vgl. Tab. III). Nach oben scheint sich das Spektrum stetig weiter fortzusetzen, indessen ist es wahrscheinlich, daß diese Stetigkeit eine nur scheinbare ist und daß sich hier eine ganz andere β -Gruppe durch Zufall kontinuierlich anschließt. Das ersieht man aus Tab. II, in welcher diejenigen Geschwindigkeiten verzeichnet sind, welche aus derselben Formel mit $n = 3$, $n' = -1$ hervorgehen.

Tabelle II.

Berechnet		Gemessen von				v. Baeyer. Hahn und Meitner β
x	β	Danysz		Rutherford und Robinson		
		β	Int.	RaB β	RaC β	
92	0,877	—	—	—	0,876 5	0,86
—	—	0,867	st.	—	0,868 2	
91	0,864	—	—	—	0,861 6	
—	—	—	—	—	0,857 6	
90	0,850	—	—	—	0,847 5	0,80
89	0,837	—	—	—	0,831 6	
88	0,823	—	—	0,823 6	—	
87	0,809	0,803	s.	0,805 3	—	
86	0,796	0,798	st.	0,797 2	0,797 6	0,80
85	0,783	—	—	0,787 7	—	
84	0,771	0,772	s.s.	—	0,776 4	
83	0,759	0,763	s.	0,762 3	—	

Im Gegensatz zu Tab. I finden sich hier zwei Geschwindigkeiten, welche durch unsere Formel nicht umfaßt werden. Das könnte davon herrühren, daß eine dritte β -Strahlengruppe in dasselbe Gebiet übergreift. Vielleicht könnte man die größeren Geschwindigkeiten, die nach Danysz bis 0,996 reichen, durch Kombination von größeren Quantenzahlen n und n' erhalten; wir halten dies indessen für nicht sehr wahrscheinlich.¹⁾ Man darf nicht außer acht lassen, daß auch ins Unendliche gehende Bahnen möglich sind, welche teilweise im Innern des Kerns verlaufen und sich daher unserer Theorie entziehen.

1) Um dies zu prüfen, müßte man die Konstante α mit größerer Genauigkeit kennen, da die Unsicherheit derselben mit wachsendem β immer größeren Einfluß gewinnt und eine Zuordnung der gemessenen Geschwindigkeiten immer schwieriger wird.

Die Gruppe der nächstkleineren Geschwindigkeiten, welche unsere Formel (bei kleinen Werten von n und n') enthält, bekommt man, wenn man $n = 2$, $n' = 0$ setzt:

α	92	91	90	89	88	87	86	85	84	83
β	0,294	0,290	0,287	0,283	0,280	0,276	0,272	0,269	0,265	0,262

Die Geschwindigkeit $\beta = 0,29$ wurde von Baeyer, Hahn und Meitner an Präparaten der Thoriumreihe gemessen.

Um die zwischen 0,63 und 0,29 liegenden Geschwindigkeiten zu erklären, wollen wir, ohne uns auf eine bestimmte Deutung festzulegen, auf die folgende Möglichkeit hinweisen: Die bis jetzt betrachteten Geschwindigkeitsstufen erhielten wir, indem wir von der Betrachtung des isolierten Kerns ausgingen. Fassen wir das System ins Auge, welches aus dem Kern und den N -Elektronen des innersten Atomringes besteht und denken uns alle übrigen Elektronen weg, so erhalten wir neue Bahnen, deren Geschwindigkeit sich mit guter Näherung aus Formel (43) ergibt, wenn wir an Stelle von α die Zahl $\alpha - N$ einsetzen. Ebenso können wir das System aus Kern und zwei Elektronenringen betrachten usw. Von diesem Standpunkt weisen die an Ra-Präparaten festgestellten weicheren β -Strahlen eine interessante Regelmäßigkeit auf.

Tabelle III.

Gemessen von			Berechnet		
Rutherford und Robinson an RaB		Danyssz	nach Formel (43)		
$H\eta$	β	β	$\alpha - N$	β	$\alpha - N$
950	0,489		70	0,490	84—2·7
914	0,474		69	0,481	83—2·7
861	0,452		[66]	[0,453]	
836	0,442		[65]	[0,444]	
798	0,426	0,422	63	0,427	84—3·7
770	0,414	0,412	62	0,418	83—3·7
663	0,365	[0,362]	56	0,369	84—4·7
		[0,361]	55	0,361	83—4·7

Die Geschwindigkeit $\beta = 0,635$ der Tab. I haben wir als zu $\alpha = 84$ und $\alpha = 83$ gehörende Doppellinie gedeutet. Es ist merkwürdig, daß die Mehrzahl der am selben Präparat beobachteten kleineren Werten von β sich in das Schema

$\alpha - N = 84 - 7m$ (bzw. $\alpha - N = 83 - 7m$) einordnet. Ein Analogon hierzu bilden die Messungen von Baeyer, Hahn und Meitner an Radioaktiniumpräparaten.

Tabelle IV.

Gemessen von Baeyer, Hahn und Meitner	Berechnet nach Formel (43)		
	$\alpha - N$	β	$\alpha - N$
0,73	91	0,733	
0,67	87	0,677	87
0,60	81	0,604	87-1.6
0,53	75	0,533	87-2.6
0,49	69	0,481	87-3.6
0,43	63	0,427	87-4.6
0,38	57	0,377	87-5.6

Dem Radioaktinium selbst wird die Kernladung 90 zugeschrieben¹⁾, diejenige des durch die β -Strahlung entstehenden Produkts ist daher 91, und es ist sehr befriedigend, daß gerade die zugehörige Geschwindigkeit gemessen wurde. Im übrigen sind die Verhältnisse in der Aktiniumreihe noch nicht ganz geklärt, so daß die Existenz eines β -Strahlers von der Kernladung 86 sehr wohl möglich ist. Alle anderen Werte unserer Tabelle gehören zu dem Schema $\alpha - N = 87 - 6m$.

Es liegt uns fern, aus dieser immerhin interessanten Regelmäßigkeit weitgehende Schlüsse ziehen zu wollen, aber eine prüfbare Folgerung wollen wir noch besprechen: Wenn die Bahnen der Serie $\alpha - N = 83 - 7m$ wirklich in einem und demselben Atom vorhanden sind, so kann man mit dem Überspringen des Elektrons aus einer dieser Bahnen in eine andere rechnen, was mit γ -Strahlenemission nach der Bohrschen Frequenzbeziehung ($h\nu = A_1 - A_2$) verbunden sein könnte. Wir haben die Wellenlängen berechnet, welche dem Überspringen aus einer jeden der Bahnen der Serie $\alpha - N = 83 - 7m$ in alle anderen, deren Energiekonstante kleiner ist, entsprechen. Sie fallen zum Teil in den Bereich der Messungen, die von Rutherford und Andrade²⁾ an RaB- und RaC-Präparaten ausgeführt wurden, und sind in Tabelle V zusammengestellt.

1) K. Fajans, l. c.

2) Sir Ernest Rutherford and E. N. da C. Andrade, Phil. Mag. 27. p. 854; 28. p. 263. 1914.

Tabelle V (γ -Strahlen).

Berechnet	Gemessen von Rutherford und Andrade
$\lambda \cdot 10^9$	$\lambda \cdot 10^9$
1,14 cm	1,15
1,33	1,37
1,68	1,69
(1,95)	1,96
(2,53)	2,62 ?
(2,78)	—
3,58	—
(4,30)	4,28
6,18	—
8,50	8,53

Die eingeklammerten Wellenlängen sind mit Benutzung des Wertes $\kappa - N = 88 - 7 = 76$ berechnet, welchem kein beobachtetes β -Strahlenbündel entspricht.

Ebenso ist das Überspringen eines Elektrons aus den Bahnen der Gruppe $n = 1$, $n' = 0$ (Tab. I) in die der Gruppe $n = 2$, $n' = 0$ möglich, was auf harte γ -Strahlen führt. Die härtesten von Rutherford und Andrade gemessenen Wellenlängen sind $0,99 \cdot 10^{-9}$ cm und $0,72 \cdot 10^{-9}$ cm, bei dem eben erwähnten Übergang ergeben sich für $\kappa = 88$ und $\kappa = 88$ die Wellenlängen $0,977 \cdot 10^{-9}$ cm und $0,710 \cdot 10^{-9}$ cm. Die Übereinstimmung könnte indessen auf Zufall beruhen, denn $\kappa = 88$ ist die einzige Kernladung der Tab. I, zu welcher keine beobachtete Geschwindigkeit gehört; es wäre gewagt, anzunehmen, daß gerade dieser Zahl eine besonders starke γ -Strahlung entspricht.

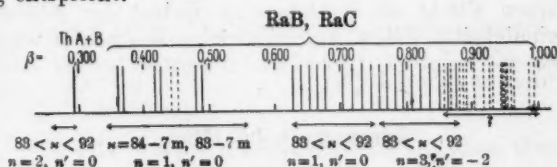


Fig. 4.

In Fig. 4 haben wir es graphisch veranschaulicht, wie weit sich die verschiedenen Geschwindigkeiten der β -Strahlen durch unsere Formel erklären lassen. Die senkrechten Striche entsprechen den gemessenen Geschwindigkeitsstufen, unten sind

die Werte der Zahlen n , n' , κ angegeben, welche man in Formel (42) einsetzen muß, um dieselben zu berechnen. Punktirte Striche entsprechen Geschwindigkeiten, deren Einordnung noch nicht gelungen ist.

§ 6. *Zusammenfassung.* — 1. Es wurde die Auffassung zugrunde gelegt, daß sich ein Elektron um einen Atomkern nicht nur in Bohr-Sommerfeldschen Kreisen und Ellipsen bewegen kann, sondern auch in quantenhaft ausgezeichneten („statischen“) Hyperbeln. Auf diesen gelangt es ins Unendliche und tritt als lichtelektrischer Kathodenstrahl oder als β -Strahl in Erscheinung.

2. Beim Versuch, die Quantentheorie auf die Bestimmung von hyperbolischen Bahnen auszudehnen, zeigte es sich, daß sich zwar der Bereich, über welchen die Quantenintegrale zu erstrecken sind, aus allgemeinen Gesichtspunkten eindeutig ergibt, daß aber diese Integrale im allgemeinen unendlich werden. Der Weg, welcher eingeschlagen wurde, um diese Schwierigkeit zu überwinden, scheint uns der einfachste zu sein, ist aber wahrscheinlich nicht der einzige mögliche und entbehrt daher nicht der Willkür. Aus diesem Grunde ist die Theorie in der mitgeteilten Gestalt noch nicht als definitiv zu betrachten und wird sich vielleicht noch einige Formänderungen gefallen lassen müssen.

3. Schon in der gegenwärtigen Form weist die Theorie einige bemerkenswerte Übereinstimmungen mit der Erfahrung auf. Es berechtigt zu den besten Hoffnungen, daß die von empirischen Konstanten freie Formel, zu welcher man gelangt, bei geeigneter Wahl der Kernladung sowohl im lichtelektrischen Effekt als besonders im Gebiet der β -Strahlen Geschwindigkeiten liefert, welche wirklich beobachtet wurden.

München, Juni 1916.

(Eingegangen 1. Juli 1916.)

5. Zur Methode der logarithmischen Isochromaten; von Clemens Schaefer,

Die Bemerkungen von Herrn E. P. Hyde¹⁾ in diesen Annalen veranlassen mich, einige elementare Rechnungen und Betrachtungen zur Methode der logarithmischen Isochromaten mitzuteilen, die ich schon vor Jahresfrist angestellt habe, an deren Veröffentlichung ich jedoch durch meine zeitweilige Einziehung zum Heeresdienste verhindert wurde.

Das Wesen der Methode der logarithmischen Isochromaten läßt sich am einfachsten übersehen, wenn man die Frage analytisch behandelt.

Ich betrachte zunächst den Fall, daß aus dem Spektrum eines schwarzen Körpers von der variablen Temperatur T die Intensität der Wellenlänge λ_1 photometriert wird gegen die konstante Helligkeit, die die nämliche Wellenlänge λ_1 im Spektrum eines grauen Körpers von der konstanten, unbekannten Temperatur T_0 besitzt. Die Aufgabe ist, die Temperatur T_0 der grauen Vergleichslichtquelle zu finden.

Für den schwarzen Körper gelten die Gleichungen:

$$(1) \quad \int_0^{\infty} S_{\lambda T} d\lambda = \sigma T^4 \quad (\text{Stefan-Boltzmannsches Gesetz}),$$

$$(2) \quad S_{\lambda T} = C \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}} \quad (\text{Wiensches Verteilungsgesetz}),$$

für den grauen Körper in leicht verständlicher Bezeichnung ebenso:

$$(3) \quad \int_0^{\infty} G_{\lambda T} d\lambda = \mu T^4 \quad (\text{Stefan-Boltzmannsches Gesetz}),$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} G_{\lambda T} &= C' \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}} \\ &= C A \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Verteilungsgesetz}),$$

1) E. P. Hyde, Ann. d. Phys. 49. p. 144. 1916.

wenn A das konstante Absorptionsvermögen des grauen Körpers bedeutet. Daraus folgt sofort:

$$(5) \quad \frac{\mu}{\sigma} = \frac{C'}{C} = A.$$

Durch Logarithmieren von (2) und (4), wobei in beiden Gleichungen $\lambda = \lambda_1$, in (2) $T = T$, in (4) $T = T_0$ zu setzen ist, wie es den obigen Voraussetzungen entspricht, folgt:

$$(6) \quad \log S_{\lambda_1 T} = \log C - 5 \log \lambda_1 - \frac{c}{\lambda_1 T} \quad (\text{schwarzer Körper}),$$

$$(7) \quad \log G_{\lambda_1 T_0} = \log C' - 5 \log \lambda_1 - \frac{c}{\lambda_1 T_0} \quad (\text{grauer Körper}),$$

und durch Subtraktion:

$$(8) \quad \log \left(\frac{S_{\lambda_1 T}}{G_{\lambda_1 T_0}} \right) = \log \left(\frac{C}{C'} \right) - \frac{c}{\lambda_1} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right).$$

Wird darin $\log \frac{S_{\lambda_1 T}}{G_{\lambda_1 T_0}}$ gleich y , $\frac{1}{T}$ gleich x gesetzt, so stellt

$$(9) \quad y = \log \left(\frac{C}{C'} \right) + \frac{c}{\lambda_1 T_0} - \frac{c}{\lambda_1} x$$

eine Gerade in dem gewählten Koordinatensystem dar, eben die Isochromate für die Wellenlänge λ_1 . Analog lautet die logarithmische Isochromate für die Wellenlänge λ :

$$(10) \quad y = \log \left(\frac{C}{C'} \right) + \frac{c}{\lambda T_0} - \frac{c}{\lambda} x.$$

Der Schnittpunkt (\bar{x}, \bar{y}) beider Geraden ergibt sich zu:

$$(11) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{T_0}, \\ \bar{y} = \log \left(\frac{\sigma}{\mu} \right) = \log \left(\frac{1}{A} \right). \end{cases}$$

Es ergibt sich hier das der von Lummer und Pringsheim¹⁾ angegebenen Methode der logarithmischen Isochromaten zugrunde liegende Resultat, daß, da \bar{x} unabhängig von der Wellenlänge λ ist, alle grauen Isochromaten sich in einem Punkte schneiden, dessen Abszisse der reziproke Wert der gesuchten Temperatur T_0 ist. Die zweite Gleichung (11) zeigt übrigens, daß auch die Ordinate des Schnittpunktes eine einfache physikalische Bedeutung besitzt; sie liefert sofort das Absorptionsvermögen bzw. das Reflexionsvermögen

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandlungen d. deutsch. Phys. Ges. 3. p. 36. 1901.

des grauen Körpers oder endlich die Konstante im Gesamtstrahlungsgesetze des grauen Körpers. Diese physikalische Bedeutung der Schnittpunktsordinate ist bisher noch nicht ausgenutzt worden, obwohl dies durchaus möglich ist. Eine Ausdehnung der Versuche in dieser Richtung ist wünschenswert.

Wir wollen nun die obige Gleichung (11) für Kohle prüfen, die nach Untersuchungen von Lummer¹⁾ im sichtbaren Gebiete, auf das es uns hier allein ankommt, als ein grauer Körper zu betrachten ist. Messungen nach der Methode der logarithmischen Isochromaten hat Frl. Benedict²⁾ ausgeführt. Speziell interessieren uns die auf p. 646ff. ihrer Arbeit mitgeteilten Beobachtungen an Kohlenfadenglühlampen. Ihre Daten sind in der folgenden Tabelle enthalten (p. 647 der genannten Arbeit).

Tabelle I.

Absol. Temp. des schwarzen Körpers T	$\frac{1}{T}$	$\log \left(\frac{S_{\lambda} T}{G_{\lambda} T_0} \right)$				
		$\lambda = 0,645 \mu$	$\lambda = 0,592 \mu$	$\lambda = 0,556 \mu$	$\lambda = 0,526 \mu$	$\lambda = 0,500 \mu$
1253°	$7,980 \cdot 10^{-4}$	1,151	0,926	0,782	0,595	0,439
1285	7,780	1,350	1,125	0,930	0,740	—
1339	7,468	1,654	1,476	1,315	1,153	1,030
1458	6,860	2,257	2,129	1,980	1,860	1,779
1545	6,472	2,595	2,487	2,405	2,321	2,281
1630	6,133	2,977	2,881	2,794	2,736	2,666

In ihrer Arbeit ist nun Frl. Benedict so verfahren, daß sie als Abszissen $\frac{1}{T} \cdot 10^4$ und als Ordinaten $\log \left(\frac{S_{\lambda} T}{G_{\lambda} T_0} \right)$ in möglichst großem Maßstabe aufgetragen, durch die markierten Punkte sorgfältig Geraden gezogen und diese bis zum Schnittpunkt verlängert hat. Es ergab sich ein Schnittpunkt der 6 Isochromaten, als dessen reziproke Abszisse sich $T_0 = 2057^\circ$ fand, während aus dem Wattverbrauch eine Temperatur des Kohlefadens von 2066° gefunden wurde.

1) O. Lummer, im Handb. d. Elektr. u. d. Magn., herausg. von L. Graetz, 2. p. 453ff. Auch andere, direkte Reflexionsmessungen anderer Autoren lassen die „Grauheit“ der Kohle im sichtbaren Gebiete als sehr wahrscheinlich erscheinen.

2) E. Benedict, Ann. d. Phys. 47. p. 641. 1915.

Es fragt sich indessen, ob dieses sehr günstige Ergebnis auch wirklich als gesichert betrachtet werden darf. Ein Bedenken, das sich sofort darbietet, ist nämlich folgendes: Die logarithmischen Isochromaten sind Gerade, *die sich unter sehr kleinen Winkeln schneiden*. Da wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler die gemessenen Punkte natürlich nicht exakt auf einer Geraden liegen, so muß die Gerade möglichst gut durch sie hindurch gelegt werden, wobei der Willkür natürlich ein gewisser Spielraum bleibt; die Richtung der logarithmischen Isochromaten ist also bis zu einem gewissen Grade unbestimmt. Eine kleine Neigungsänderung der Geraden würde aber den Schnittpunkt bei der Kleinheit der Winkel, die sie miteinander bilden, sehr stark verschieben. Dieser geschilderte Nachteil haftet der graphischen Darstellung der Isochromaten grundsätzlich an. Es bietet sich als Ausweg aus dieser Schwierigkeit die Berechnung der Geraden unter Benutzung sämtlicher Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate. Ich habe deshalb die Isochromaten 526μ , 556μ , 592μ und 645μ auf diese Weise berechnet. Das Resultat ist folgendes:

$$\begin{aligned} \text{Isochromate für } 526\mu: & y = 9,9538 - 11785,7 x \\ \text{,, } 556\mu: & y = 9,6891 - 11238,4 x \\ \text{,, } 592\mu: & y = 9,3515 - 10559,9 x \\ \text{,, } 645\mu: & y = 9,0051 - 9848,66 x \end{aligned}$$

Aus je zweien von ihnen bestimmt man die Schnittpunktkoordinaten. Natürlich werden hierbei die Isochromaten sich tatsächlich *nicht* in einem Punkte schneiden, wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Aber bei einem grauen Strahler müssen die Schnittpunkte einander sehr naheliegen, so daß die resultierenden Temperaturen nahezu gleich sind; die Abweichungen nach oben und unten vom Mittelwerte geben dann ein Kriterium für die Genauigkeit der Messung und die Brauchbarkeit der Methode überhaupt. Aus den obigen Zahlen ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{für die Isochromaten } 645 \text{ u. } 592: & T_0 = 2053^\circ \\ \text{,, } 556 \text{ u. } 592: & T_0 = 2009^\circ \\ \text{,, } 556 \text{ u. } 645: & T_0 = 2032^\circ \\ \text{,, } 526 \text{ u. } 556: & T_0 = 2067^\circ \\ \text{,, } 526 \text{ u. } 592: & T_0 = 2035^\circ \\ \text{,, } 526 \text{ u. } 645: & T_0 = 2042^\circ \end{aligned}$$

Man sieht in der Tat, daß die berechneten Temperaturen sehr nahe aneinander liegen, so daß die Bildung eines Mittelwertes gerechtfertigt ist. Man findet als Mittelwert

$$T_0 = 2040^\circ \text{ abs.}$$

mit einer Maximalabweichung von etwa 30° nach oben und unten. Der angegebene Wert stimmt sehr gut mit dem von Frl. Benedict graphisch extrapolierten Werte von 2057° und dem aus dem Wattverbrauche berechneten von 2066° überein.

Man kann zweierlei aus dieser guten Übereinstimmung schließen: *Erstens zeigt sich, daß die Messungen an Kohle von Frl. Benedict offenbar sehr gut und sorgfältig gemacht sind. Zweitens ist die Methode der logarithmischen Isochromaten, wenn man dieselben nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, wirklich brauchbar, um Temperaturen grauer Strahler zu bestimmen.*

Gleichzeitig scheint es, als wären die oben gegen die graphische Darstellung erhobenen Bedenken tatsächlich doch nicht schwerwiegender Natur, da wir hier eine so gute Übereinstimmung finden. Indessen wäre dieser Schluß verfrüht. Wir werden im Gegenteil bei der Analyse weiterer Messungen bald Gründe finden, die die Anwendung der graphischen Methode als einen Mangel erscheinen lassen.

Um dies zu zeigen, betrachten wir nun selektiv strahlende Metalle, bei denen A eine Funktion von λ ist, was wir durch den Index λ andeuten (A_λ). Nach dem Kirchhoffschen Gesetze lautet das Verteilungsgesetz für solche Körper:

$$(12) \quad E_{\lambda T} = A_\lambda \cdot C \cdot \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Benutzt man ein solches Material als Strahlungsquelle, z. B. eine der modernen Metallfadenlampen, so lautet nach (2) und (12) die Gleichung der Isochromaten für die Wellenlänge λ_1 :

$$(13) \quad \log \left(\frac{S_{\lambda_1 T}}{E_{\lambda_1 T_0}} \right) = -\log A_{\lambda_1} - \frac{c}{\lambda_1 T} + \frac{c}{\lambda_1 T_0},$$

wobei wieder T_0 die unbekannte Temperatur des selektiven Strahlers ist, die gesucht wird. Bezeichnen wir wieder $\log \left(\frac{S_{\lambda_1 T}}{E_{\lambda_1 T_0}} \right)$ durch y , $\frac{1}{T}$ durch x , so lauten für λ_1 und λ die Isochromaten:

$$(14) \quad \begin{cases} y = -\log A_1 + \frac{c}{\lambda_1 T_0} - \frac{c}{\lambda_1} x, \\ y = -\log A_2 + \frac{c}{\lambda T_0} - \frac{c}{\lambda} x, \end{cases}$$

und der Schnittpunkt (\bar{x}, \bar{y}) folgt zu:

$$(15) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{T_0} + \frac{\log \frac{A_1}{A_2}}{\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_1}}, \\ \bar{y} = \frac{-\frac{c}{\lambda} \log A_1 + \frac{c}{\lambda_1} \log A_2}{\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_1}}. \end{cases}$$

Die Abszisse \bar{x} des Schnittpunktes je zweier Isochromaten ist hier nicht mehr $1/T_0$, sondern es tritt noch ein Korrektionsglied hinzu, das von der Wellenlänge λ abhängt, also für verschiedene Isochromaten im allgemeinen nicht konstant ist. *Die Isochromaten eines selektiven Strahlers schneiden sich also im allgemeinen nicht in einem Punkte, wie bekannt ist.*

Man kann nun in verschiedener Weise verfahren, um dennoch aus den Isochromaten die gesuchte Temperatur T_0 zu finden. Ich schildere zunächst die Methode von Fräulein Benedict. Infolge der Veränderlichkeit des Absorptionsvermögens mit der Wellenlänge sind die Isochromaten eben so gelagert, daß kein gemeinsamer Schnittpunkt auftritt. Erteilt man jedoch jeder Isochromaten — nach Maßgabe des dieser Wellenlänge zukommenden Absorptionsvermögens — eine passende Parallelverschiebung (kurz gesagt: „korrigiert man auf Graueit“), so müssen die verschobenen Isochromaten wieder einen gemeinsamen Schnittpunkt bekommen. Fräulein Benedict hat dieses theoretisch zweifellos richtige Verfahren z. B. bei Platinlampen angewendet (p. 661 ihrer Arbeit) und findet in einem gleich näher zu besprechenden Falle eine Schnittpunktstemperatur von 1830° , während sich aus dem Wattverbrauche der Wert 1791° ergab. Ähnlich war das Ergebnis in anderen Fällen.

Man kann indessen auch anders verfahren, auf Grund der Gleichung (15). Denn da A_1 , A_2 sowie die Konstante c bekannt sind, kann man aus je zwei Isochromaten mit Hilfe

der Abszisse \bar{x} des Schnittpunktes T_0 nach der Gleichung berechnen:

$$(16) \quad \frac{1}{T_0} = \bar{x} - \frac{\log \frac{A_1}{A_2}}{\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_1}}$$

Diese Art der Temperaturbestimmung hat zunächst folgenden Vorzug vor der Benedictschen: Hier geben je zwei Isochromaten einen Wert der gesuchten Temperatur, also erhält man bei 4 Isochromaten bereits 6 Temperaturbestimmungen, während die erstere Methode nur einen Wert unter Benutzung des gesamten Materials liefert.

Ich habe Gleichung (16) an einem mit Pt-Lampe gemachten Versuche von Frl. Benedict geprüft. Die Daten sind in der Tabelle V auf p. 663 ihrer Arbeit enthalten, die ich im folgenden nochmals mitteile. Zu bemerken ist noch, daß hier die Pt-Lampe nicht gegen einen schwarzen Körper photometriert wurde, sondern, was offenbar für die Richtigkeit der Gleichung (16) belanglos ist, gegen einen grauen, nämlich eine Kohlefadenlampe.

Tabelle II.

Temperatur der Kohlen- fadenlampe T	$\frac{1}{T}$	$\log \left(\frac{S_{\lambda_1} T}{E_{\lambda_1} T_0} \right)$			
		$\lambda = 0,645 \mu$	$\lambda = 0,592 \mu$	$\lambda = 0,540 \mu$	$\lambda = 0,513 \mu$
1474°	$6,785 \cdot 10^{-4}$	1,367	1,270	1,132	1,042
1517	6,590	1,565	1,476	1,350	1,250
1548	6,460	1,679	1,608	1,500	1,409
1603	6,240	1,920	1,850	1,744	1,685
1648	6,070	2,065	2,015	1,912	1,880
1681	5,950	2,194	2,155	2,061	2,020
1747	5,730	2,407	2,369	2,301	2,269

Nach Fig. 9 der Arbeit von Frl. Benedict ergeben sich nun folgende, aus den Einzelschnittpunkten, die graphisch gewonnen sind, resultierende Temperaturen T_0' (vgl. Tab. III).

Ich habe zunächst die graphisch von Frl. Benedict gewonnenen, in Spalte 2 der folgenden Tab. III mitgeteilten Werte T_0' als richtig angenommen und aus ihnen nach Gleichung (16) T_0 berechnet. Das Resultat der Rechnung,

Tabelle III.

Isochrom.- Kombination.	T_0' nach Benedict	T_0 nach Benedict	T_0 nach Gleich. (16) mit Hilfe von T_0' nach Benedict
540 u. 513	1834°	1830°	1778°
645 u. 592	1818		1730
645 u. 513	1939		1835
592 u. 513	2000		1883
592 u. 540	2088		1942
540 u. 645	1984		

maximale Differenz
= 212°

die erstens einen konstanten Wert T_0 (oder wenig voneinander abweichende Werte T_0) und zweitens einen mit Frl. Benedicts angegebenen Werte T_0 übereinstimmenden Wert hätte liefern sollen, ist in der 4. Spalte der Tabelle mitgeteilt. Die Zahlen differieren um mehr als 200°. Da durch die Berechnung nach Gleichung (16) an Stelle der graphischen Parallelverschiebung jede Willkür und jeder Fehler ausgeschaltet ist, beweist diese Nichtübereinstimmung folgendes:

1. Die graphisch vorgenommene Parallelverschiebung der Isochromaten hat zu falschen Resultaten geführt; dies spricht gegen die Brauchbarkeit der graphischen Methode.

2. Auch die auf graphischem Wege gewonnenen Werte T_0' von Frl. Benedict müssen fehlerhaft sein, da sonst die Rechnung für T_0 ein annähernd konstantes Resultat hätte ergeben müssen. Auch dies spricht gegen die Benutzung der graphischen Methode.

Ich komme deshalb zu dem Resultat, daß die Benutzung der graphischen Methode zu verwerfen und diese stets durch die Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate zu ersetzen ist. Geschieht dies, so ist die Methode der logarithmischen Isochromaten geeignet zur Temperaturbestimmung von Lichtquellen.

Es bliebe noch die Frage zu erörtern, wie es kommen kann, daß bei der Kohle die Benutzung der graphischen Methode ein mit der Rechnung gut übereinstimmendes Resultat liefern konnte, während bei den Platinversuchen so erhebliche Abweichungen auftraten. Darüber läßt sich mit Sicherheit nichts aussagen, höchstens kann man vermuten, daß psychologische Einflüsse, die ja bei der graphischen Darstellung nie mit Sicherheit auszuschließen sind, eine Rolle gespielt haben mögen. Auch aus derartigen Erwägungen kann nur der Schluß

gezogen werden, daß das graphische Verfahren durch die Rechnung ersetzt werden muß, bei der psychologische Einflüsse ausgeschlossen sind.

Über das bisher erhaltene Resultat, nämlich die Ersetzung der graphischen Darstellung durch die Rechnung, hinausgehend, kann man außerdem noch zeigen, daß die an Pt erhaltenen Resultate von Frl. Benedict durch eine unvermutete und bisher nicht mit Sicherheit aufgeklärte Fehlerquelle entstellt sein müssen.

Wir wollen zu diesem Zwecke nach den Beobachtungen von Frl. Benedict, die in Tab. II dieser Arbeit wiedergegeben sind, die Isochromaten für Pt nach der Methode der kleinsten Quadrate und die aus den Schnittpunkten je zweier folgenden T_0' -Werte berechnen. Aus diesen T_0' -Werten muß sich dann nach Gleichung (16) T_0 ergeben, und zwar ein konstanter (oder nahezu konstanter) Wert. Ich finde folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \text{Für die Isochromate } 645 \mu\mu: & y = 7,9974 - 9762,7 x \\ \text{,, ,, ,, } 592 \mu\mu: & y = 8,3358 - 10407 x \\ \text{,, ,, ,, } 540 \mu\mu: & y = 8,5854 - 10975 x \\ \text{,, ,, ,, } 513 \mu\mu: & y = 8,962 - 11677,5 x \end{array}$$

Daraus berechnen sich folgende Werte T_0' , die ich in der 3. Spalte der folgenden Tab. IV mit den bereits oben mitgeteilten, von Frl. Benedict graphisch bestimmten, die in Spalte 2 enthalten sind, zusammenstelle. Die 4. Spalte enthält die Abweichungen.

Tabelle IV.

Isochrom.- Kombination.	T_0' nach Benedict	T_0' nach kl. Quadrat	$\Delta T_0'$	T_0 nach Gl. (16)
540 u. 513	1834°	1867°	+ 33°	1808°
645 u. 592	1818	1904	+ 86	—
645 u. 513	1939	1985	+ 46	1873
592 u. 513	2000	2029	+ 29	1908
592 u. 540	2088	2270	+ 182	2170
645 u. 540	1984	2061	+ 77	1961

Zunächst zeigt Spalte 4, die die Abweichungen zwischen den graphisch gewonnenen und den berechneten T_0' -Werten enthält, nochmals, daß die graphische Methode nicht brauchbar ist. Ferner aber zeigen die stark differierenden Werte T_0 ,

daß auch die Beobachtungen Fehler enthalten müssen. Wahrscheinlich haben sich während der Benutzung die Platinlampen in unkontrollierbarer Weise geändert, z. B. durch Verschlechterung des Vakuums; denn die Sorgfalt der Messungen wird durch die Versuche an Kohlefadenlampen bewiesen.

Auf eine Anwendungsmöglichkeit der Gleichung (16) möchte ich noch hinweisen. Sind T_0' und T_0 bekannt, so erlaubt die Aufnahme von Isochromaten die relativen Werte des Absorptionsvermögens für die benutzten Wellenlängen zu finden; ist außerdem ein absoluter Wert bekannt, so können die absoluten Werte für alle benutzten Wellenlängen bestimmt werden. Und zwar bei der jeweiligen hohen Temperatur T_0 . Die Berechnung der A_λ nach (16) und der Vergleich mit den gefundenen Werten von Hagen und Rubens war der ursprüngliche Zweck, weswegen ich vor einem Jahre diese Rechnungen ausführte.

Wir kommen schließlich zu einem weiteren Punkte. Wir haben oben den Satz benutzt, daß die Isochromaten grauer Strahler sich in einem Punkte schneiden müssen. Kann diese Behauptung umgekehrt werden, d. h. kann aus der Tatsache, daß die Isochromaten eines Strahlers mit unbekannten Eigenschaften sich in einem Punkte schneiden, geschlossen werden, daß er grau (oder schwarz) ist? Und ist die Schnittpunkttemperatur stets die Temperatur des Strahlers?

Hr. Hyde hat bereits bemerkt, daß die Umkehrung des Satzes nicht gestattet ist.¹⁾ In der Tat ist dies leicht aus der Gleichung (15) abzuleiten:

$$(15) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{T_0} + \frac{\log \frac{A_\lambda}{A_{\lambda_1}}}{\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_1}}, \\ \bar{y} = \frac{-\frac{c}{\lambda} \log A_{\lambda_1} + \frac{c}{\lambda_1} \log A_\lambda}{\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_1}}, \end{cases}$$

1) In der Arbeit von Lummer und Pringsheim (l. c.) ist der Sachverhalt übrigens richtig dargestellt und die unrichtige Umkehrung des obigen Satzes weder behauptet noch benutzt.

Denn wenn die Zusatzglieder

$$\frac{\log \frac{A_1}{A_2}}{\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{-\frac{c}{\lambda} \log A_1 + \frac{c}{\lambda_1} \log A_2}{\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_1}},$$

die im allgemeinen Funktionen der Wellenlänge λ sind, zufällig unabhängig von λ werden, so müssen auch die Isochromaten selektiver Strahler einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt besitzen. Bedingung dafür, daß zunächst die Abszisse \bar{x} die nämliche ist, ist offenbar:

$$\log A_1 - \log A_2 = \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_1} \right) \cdot \text{Konst., oder}$$

$$\log A_1 + \frac{K}{\lambda} = \log A_2 + \frac{K}{\lambda_1} = \text{Konst.,}$$

wo K eine neue Konstante ist. Dies kann in die Form gebracht werden:

$$(17) \quad A_1 = D e^{-\frac{K}{\lambda}},$$

wo D wieder eine neue Konstante bedeutet. Der aus (17) folgende Wert von A_1 macht auch das Zusatzglied von \bar{y} in Gleichung (15) konstant. Also folgt: Ist bei einem selektiven Strahler das Absorptionsvermögen A_1 in der durch (17) geforderten Weise von der Wellenlänge abhängig, so schneiden sich seine Isochromaten in einem Punkte, dessen Schnittpunktsabszisse jedoch nicht die Temperatur ergibt. Ist indessen das Absorptionsvermögen A_1 bekannt, so kann man immer noch nach Gleichung (16) die gesuchte Temperatur T_0 berechnen.

Auf den ersten Blick erscheint es unwahrscheinlich, daß eine so einfache Beziehung wie (17) z. B. bei Platin erfüllt sein sollte. Dennoch ist dies angenähert im sichtbaren Spektralgebiet der Fall. Nimmt man $\log A_1$ als Ordinate η , $1/\lambda$ als Abszisse ξ , so stellt (17), das die Form annimmt

$$(17a) \quad \eta + K\xi = \text{Konst.}$$

eine Gerade im gewählten Koordinatensystem dar. Aus den Beobachtungen von Hagen und Rubens¹⁾ ergeben sich nun folgende zusammengehörigen Werte von A_1 und λ :

1) E. Hagen und H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1. 1902.

λ ($\mu\mu$)	420	450	500	550	600	650	700	800
A_1	0,482	0,453	0,416	0,389	0,358	0,337	0,310	0,297

In der folgenden Fig. 1 ist eine $\log A_1$ proportionale Größe als Ordinate, eine $(1/\lambda)$ proportionale als Abszisse aufgetragen.

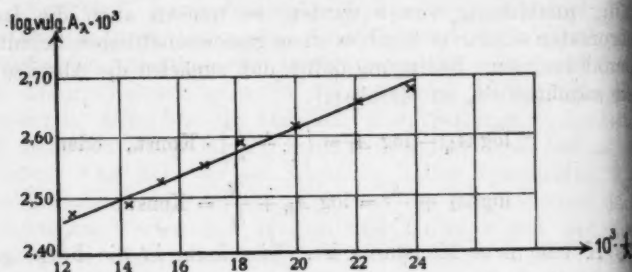


Fig. 1.

Wie man sieht, schmiegen sich die Punkte einer Geraden recht gut an; es ist bemerkenswert, daß in (15) gerade die logarithmische Form der Gleichung (17) auftritt, was für die Darstellbarkeit günstig ist.

Man sollte daher erwarten, daß auch die logarithmischen Isochromaten des Platins sich in einem Punkte schneiden müßten. Daß die Beobachtungen etwas anderes ergeben, deutet wiederum auf eine vorher nicht bemerkte Fehlerquelle in den Messungen hin.

Fr. Dr. H. Kohn bin ich für manche wertvolle Bemerkung zu Dank verpflichtet.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität,
im Juni 1916.

(Eingegangen 8. Juli 1916.)

m.

o

7

ße

en.

†

en

lie

lie

en

en

en,

lle

se-